KONINKLIJKE NEDERLANDSCHE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

PROCEEDINGS

VOLUME XLIII

No. 1

President: J. VAN DER HOEVE
Secretary: M. W. WOERDEMAN

CONTENTS

BURGERS, J. M.: "Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence", p. 2.

WEITZENBÖCK, R.: "Ein Satz über assoziierte Geraden im R_4", p. 13.

SCHOUTEN, J. A., und W. VAN DER KULK: "Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFF-scher Gleichungen". I. Ein Theorem über die Klassen der Faktoren eines Systems, p. 18.

COHEN, ERNST, und J. J. A. BLEKKINGH Jr.: "Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten". (Siebente Mitteilung), p. 32.

PENNING, F. M., and J. H. A. MOUBIS: "Cathode sputtering in a magnetic field". (Communicated by Prof. G. HOLST), p. 41.

HEUX, J. W. N. LE: "Recherches sur quelques phénomènes d'interférence des courbes de vibration" (suite). (Communicated by Prof. P. ZEEMAN). (With one plate), p. 57.

KREULEN, D. J. W., and D. TH. J. TER HORST: "On the rate of reaction in the system mineral oil/oxygen and the mechanism of the influence of copper and tin on this system". (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 66.

BRUINS, E. M.: "The decay of the penetrating cosmic rays". III. (Communicated by Prof. J. CLAY), p. 75.

MONNA, A. F.: "Sur la capacité des ensembles". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 81.

MONNA, A. F.: "Sur les notions de "point stable" et "point régulier" dans le problème de DIRICHLET". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 87.

HAANTJES, J.: "Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume". (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 91.

BUTTER, J.: "The excavation at Koerhuisbeek, Deventer, Netherlands. 1935—1937. Cadastre: C. 2, Ns 632—640". (Communicated by Prof. J. BOEKE). (With one plate), p. 95.

DISHOECK, H. A. E. VAN: "Der Einfluss von Luftdruckvariationen auf das Gehör bei Luft- und Knochenleitung". (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 104.

BIJLMER, H. J. T.: "Contribution to the anthropology of the Netherlands". (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN in the name of the Anthropological Committee of the Academy), p. 113.

Hydrodynamics. — *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence.* By J. M. BURGERS. (Mededeeling N°. 37 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

1. *Introduction.* — In recent years several authors, in particular G. I. TAYLOR and TH. VON KARMAN, have given much attention to the investigation of the correlation coefficients characteristic of the turbulent motion which is found in an air stream of constant mean velocity [1]). The turbulence in the cases considered usually is produced by a screen or a honeycomb through which the air stream has passed (such a case often presents itself with the air flow in a wind channel), and it is assumed that in the region to be considered the motion of the air is not influenced by guiding walls etc.

The assumption that the mean velocity has a constant value throughout the current implies that there is no transfer of energy from the mean motion to the turbulent motion; in consequence there will be a gradual decay of the turbulence, and the object of the investigations is to find the laws of this decay, and of the correlation phenomena associated with it.

An important conception introduced by TAYLOR into this work is that of isotropic turbulence, which is characterized by the circumstance that the average value of any function of the velocity components, defined in relation to a given set of axes, is unaltered if the axes of reference are rotated in any manner [2]).

Various results arrived at in the theoretical developments have been compared with the results of numerous accurate experimental observations,

---

[1]) G. I. TAYLOR, Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc. (London) A **151**, pp. 421—478, 1935; A **156**, pp. 307—317, 1936; Journ. Aeron. Sciences **4**, p. 311, 1937; Some recent developments in the study of turbulence, Proc. Vth Intern. Congr. for Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, p. 294.

TH. VON KARMAN, The fundamentals of the statistical theory of turbulence, Journ. Aeron. Sciences **4**, p. 131, 1937; On the statistical theory of turbulence, Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) **23**, p. 98, 1937; Some remarks on the statistical theory of turbulence, Proc. Vth Intern. Congress for Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, p. 347; TH. DE KARMAN and L. HOWARTH, On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. (London) A **164**, pp. 192—215, 1938.

H. L. DRYDEN, Turbulence investigations at the National Bureau of Standards, Proc. Vth Intern. Congress for Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, p. 362; Turbulence and the boundary layer, Journ. Aeron. Sciences **6**, p. 85, 1938; Turbulence and diffusion, Journ. Industrial and Engineering Chemistry **31**, p. 416, 1939 (all with extensive references to the literature of the subject).

L. PRANDTL, Beitrag zum Turbulenzsymposium, Proc. Vth Intern. Congress for Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, p. 340.

[2]) G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. (London) A **151**, p. 430, 1935.

made possible by the application of electrical hot wire anemometers, and the insight obtained in this way is continually developing [3]).

Now in a previous communication the present author has described some mathematical model systems, by means of which several features could be illustrated which play a part in the behaviour of turbulent motion [4]). Although these model systems had been constructed with a view to illustrate the development of a dissipative secondary motion, which grows by detracting energy from a given primary phenomenon until a balance is obtained between energy detracted and energy dissipated, the question can be brought forward whether these same model systems also may be used in order to illustrate some of the relations found in the theory of the decay of free turbulence. It is true that most of the geometrical relations which are of importance in the theory of isotropic turbulence cannot find a counterpart in the model referred to; nevertheless it is possible to illustrate the conception of correlation and the equations describing the decay of free turbulence.

This will be shown in the following sections (**2**—**3**), while in **4** and **5** those properties of the model system which are operative in the propagation of "elementary regions of turbulence" have been considered in more detail.

2. *Application of the assumptions of the theory of uniform isotropic turbulence to the model system.* — It is convenient to take as a guide the exposition of the statistical theory of isotropic turbulence given by VON KARMAN and HOWARTH [5]), and to indicate which of the ideas developed in their paper can be applied to our model system.

The model system is defined by the equations [6]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= U(v-w) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 2w \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= U(v+w) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2w \frac{\partial v}{\partial y} + 2v \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

[3]) Apart from the papers already mentioned in footnote 1) see: G. I. TAYLOR, Correlation measurements in a turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc. (London) A **157**, pp. 537—546, 1936; G. I. TAYLOR and A. E. GREEN, Mechanism of the production of small eddies from large ones, *ibid.* A **158**, pp. 499—521, 1937; G. I. TAYLOR, Production and dissipation of vorticity in a turbulent field, *ibid.* A **164**, pp. 15—23, 1938; The spectrum of turbulence, *ibid.* A **164**, pp. 476—490, 1938.

For the experimental investigations themselves the reader is referred to the articles mentioned by Prof. TAYLOR in these papers, and to those of DRYDEN and his co-workers.

The reader is also referred to a great number of papers on turbulence in the Proc. Vth Intern. Congress for Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938. References to the experimental investigations are given in many of these papers.

[4]) J. M. BURGERS, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, Verhand. Kon. Nederl. Akad. v. Wetenschappen, Afd. Natuurk. (Ie sectie) **17**, No. 2, 1939.

[5]) TH. DE KARMAN and L. HOWARTH, Proc. Roy. Soc. (London) A **164**, p. 192, 1938.

[6]) J. M. BURGERS, *l.c.* p. 16, eqs. (8. 2), (8. 3).

In order to adapt the equations to the conditions of the present subject it is necessary to assume that the domain of the coordinate y extends from $-\infty$ to $+\infty$, so that there are no boundary conditions to be fulfilled by v and w. It is supposed that the initial distributions (for $t=0$) of v and w are given as functions of y, and it is asked to find some general rules governing their development in the course of time. A special case *e.g.* might be represented by a distribution in which the y-axis is divided into alternating segments of lengths a and b, the initial values of v and w being assumed to be zero in the segments of length a, whereas they follow some prescribed course, may be of similar type but not necessarily the same for all segments, in the segments of length b.

To obtain a full analogy with the "free turbulence" of the air stream referred to before, in which there is no transfer of energy from the mean motion to the turbulent motions, we must take U equal to zero in the model system. However, when in the model system U is supposed to be a constant, its presence does not interfere with the condition of isotropy (in this respect the model system differs from the actual hydrodynamical equations); hence provisionally we shall retain the terms with U, as it is possible to drop them afterwards at any time we may like.

In analogy with the assumptions stated by VON KARMAN and HOWARTH, *l.c.* p. 193, we shall suppose that in our model system it is possible to consider *average values with respect to the time* of quantities like v, w, v^2, ..., assuming at the same time that the fluctuations actually occurring in these quantities are so rapid, that the variations of the average values are negligible throughout the period of time required for averaging. The average values consequently shall be treated as slowly varying functions of the time.

It will be assumed that the turbulence is statistically *uniform*, so that the average values are invariant against a translation along the y-axis of the points or systems of points with reference to which they are defined.

The assumption of statistical *isotropy* further induces us to suppose that the average values are invariant with regard to a "rotation" and a "reflection" of the axes for the variables v and w. This implies that we take:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{v}=0, \qquad \overline{w}=0 \\ &\overline{v^2}=\overline{w^2} \\ &\overline{vw}=0, \qquad \overline{v^2w}=0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

We now define a correlation function $f(r,t)$ by considering two points P_1 and P_2, with coordinates y_1, y_2 lying at a distance $r=y_2-y_1$ from each other; then we calculate the average value of $v_1(t)\,.\,v_2(t)$ and write:

$$\overline{v_1\,.\,v_2}=f\,.\,\overline{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

The condition of isotropy implies that also:

$$\overline{w_1\,.\,w_2}=f\,.\,\overline{w^2}=f\,.\,\overline{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

whereas on the other hand we shall have:

$$\overline{v_1 \, . \, w_2} = \overline{w_1 \, . \, v_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

The correlation function f will always have the value unity for $r = 0$, while in general it will decrease to zero when r increases indefinitely. It may be a slowly varying function of the time.

The introduction of the correlation function f makes it possible to define a linear quantity l by means of the integral:

$$l = \int_0^\infty f \, dr \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

This quantity is the analogue of the "average size of an eddy" as defined by TAYLOR [7]). In the present case it may be termed the "average size of a domain of coherence".

Following section 4 of VON KARMAN and HOWARTH's paper, we now can deduce an expression for the correlation coefficients between the derivatives of v or w. Making use of the condition of uniformity, mentioned before, we have:

$$\overline{\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \, . \, v_2} = \frac{\partial}{\partial y_1} (\overline{v_1 \, v_2}) = - \overline{v^2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

and:

$$\overline{\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y_2}} = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\overline{\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \, . \, v_2} \right) = - \overline{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

from which, when the points P_1 and P_2 are made to coalesce:

$$\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2} = - \overline{v^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_{r=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In analogy with TAYLOR then a second linear quantity λ can be defined by means of the formula [8]):

$$(\partial^2 f / \partial r^2)_{r=0} = - 2/\lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

TAYLOR takes λ to be a measure of the smallest eddies which are responsible for the dissipation.

When the considerations stated in section 6 of VON KARMAN and HOWARTH's paper are adapted to our system, we arrive at the result that all quantities of the types: $v_1^2 v_2$, $v_1^2 w_2$, $v_1 w_1 v_2$, etc., must be zero, so that apparently in our case there are no triple correlations to be retained in the equations. It must be admitted, however, that here we have to do

---

7) G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. (London) A **151**, p. 426, 1935.

8) G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc. (London) A **151**, p. 437, 1935.

with a rather dangerous point, and a further analysis of its applicability to the present case would be desirable. Such an analysis then ought to proceed along other lines. Provisionally, therefore, we shall make use of the assumption that the triple correlations can be neglected, as the purpose of this section and of the following one is no more than to point out various analogies with the equations of VON KARMAN and HOWARTH. In section **4** and **5**, however, we shall give attention to the effect of the terms of the second degree in the equations for the model system, and we shall see that they play an important part in the propagation of elementary regions of turbulence.

3. *The equation for the propagation of the correlation* (VON KARMAN and HOWARTH, section 8). From the first one of the equations (1) we deduce the relation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_1 v_2) = U(2 v_1 v_2 - v_2 w_1 - v_1 w_2) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(v_1 v_2) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}(v_1 v_2) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y_1}(v_1^2 v_2 - w_1^2 v_2) - \frac{\partial}{\partial y_2}(v_1 v_2^2 - v_1 w_2^2),$$

from which, by means of the process of averaging:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\overline{v^2}) = 2 U f \overline{v^2} + 2 \nu \overline{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

The same result could have been obtained from the second equation of the system (1). — When the term with U is dropped eq. (11) is the analogue of equation (51), p. 206, of VON KARMAN and HOWARTH's paper.

A) We first take $r = 0$. Then $f = 1$, while $(\partial^2 f/\partial r^2)_{r=0} = -2/\lambda^2$, according to (10); λ evidently can be a function of the time. Equation (11) reduces to:

$$d\overline{v^2}/dt = 2 U \overline{v^2} - 4 \nu \overline{v^2}/\lambda^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

With $U = 0$ this becomes:

$$d\overline{v^2}/dt = -4 \nu \overline{v^2}/\lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

which is the analogue of eq. (55), p. 207, of VON KARMAN and HOWARTH's paper (section 9).

B) Returning to eq. (11) and expanding the left hand side, we can eliminate $d\overline{v^2}/dt$ by means of (12), and obtain:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2 \nu \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_{r=0} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

This equation, which is independent of the value of U, is the analogue of eq. (63), p. 209, of VON KARMAN and HOWARTH's paper.

A particular solution of this equation, in which f is a function of $r/\sqrt{\nu t}$ only, is given by:

$$f = e^{-r^2/8\nu t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

This solution is the analogue of the "self-preserving correlation functions", considered by VON KARMAN and HOWARTH in section 10. When f is of this special type, eq. (10) gives:

$$\lambda^2 = 8\nu t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so that eq. (12) becomes:

$$d\overline{v^2}/dt = 2U\overline{v^2} - \overline{v^2}/2t,$$

from which

$$\overline{v^2} = \overline{v_0^2}\, e^{2Ut}\, (t_0/t)^{1/2}.$$

With $U = 0$ this reduces to:

$$\overline{v^2} = \overline{v_0^2}\, (t_0/t)^{1/2}.$$

It can also be tried to construct a solution analogous to those considered in section 11 of the paper of VON KARMAN and HOWARTH. In these solutions it is assumed that the correlation function f is independent of ν, with the exception of small values of the distance r. Hence in eq. (13) we shall neglect $\nu(\partial^2 f/\partial r^2)$, but retain the term $\nu(\partial^2 f/\partial r^2)_{r=0}$. Then it is assumed that f is a function of $\eta = r/L$, where L is a provisionally unknown function of the time. Substitution into (13) leads to:

$$-f' \frac{r}{L^2} \frac{dL}{dt} = -2\nu f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r=0},$$

which equation can be satisfied only provided:

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \text{const.}\ \nu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

If, in connection with eq. (15), we assume $(\partial^2 f/\partial r^2)_{r=0} = -2/\lambda^2 = -1/4\nu t$, we should find (taking the constant in eq. (16) equal to $-C$):

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = +\frac{C}{4t},$$

from which:

$$L = \text{const.}\ t^{C/4}.$$

At the same time we obtain:

$$-f'\eta = \frac{2}{C} f,$$

so that:

$$f = \text{const.} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{2/C}.$$

The assumption $C = 2$ *e.g.* would give:

$$L \backsim \sqrt{t}; \qquad f \backsim 1/\eta \backsim L/r.$$

However, we cannot come much further in this way, and also VON KARMAN and HOWARTH's paper does not give more than a set of possibilities.

4. *Direct investigation of the propagation of an elementary region of turbulence in the model systems.* — It may be asked whether a direct investigation of the equations defining the model systems can give us a closer insight into the laws governing the propagation of disturbances. The question is particularly interesting as this propagation depends upon the terms of the second degree in these equations, which had been eliminated in the process of averaging.

In considering this problem we shall simplify the equations by dropping the terms with U. Moreover we shall give attention mainly to the far more tractable case of the model system with only one variable v, which (with $U = 0$) is governed by the equation [9]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

We assume ν to be small, and we shall neglect the term $\nu \partial^2 v/\partial y^2$, except when a discontinuity threatens to arise in the solution of the equation. By means of a reasoning of similar kind as was given for the system with two variables [10]) it is found that a discontinuity propagates itself with a velocity c, determined by:

$$c = v_l + v_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

while at the same time it gives rise to a dissipation of energy of amount:

$$\frac{1}{6}(v_l - v_r)^3.$$

(It is to be observed that in a discontinuity we always have $v_l > v_r$). When these results are observed, we may restrict to the consideration of the equation:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

A typical example of a solution of this equation is indicated schematically in fig. 1. It has been assumed that for $t = 0$ we have $v = v_0$ in a domain

---

[9]) See J. M. BURGERS, *l.c.* p. 14, eq. (7.2), and the reference to RIEMANN given p. 27, footnote 12).

[10]) J. M. BURGERS, *l.c.* pp. 30, 40—43.

of length L_0 (say, in the domain $0 < y < L_0$); outside of this domain $v = 0$. The values of v for all interior points of the domain propagate them-

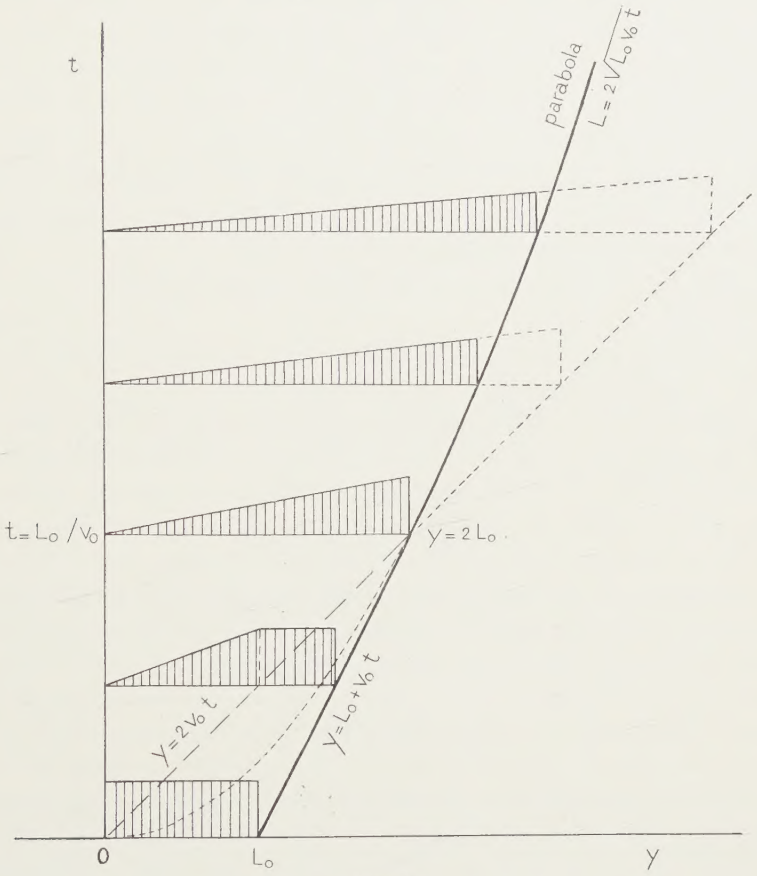


Fig. 1.

selves to the right with the velocity $2v$, which at first for all these points has the value $2v_0$. Such a propagation would leave open a space at the left hand side of the domain, of breadth $2v_0t$; in this space we obtain the solution $v = y/2t$, whereas for $y \geqq 2v_0t$ we have $v = v_0$. The discontinuity at the right hand side of the domain, however, displaces itself with the velocity v_0. Hence the region where $v = v_0$ becomes continuously narrower, until it vanishes for $t = L_0/v_0$. From then onward we have the solution $v = y/2t$ in a domain extending from $y = 0$ until $y = L$, where L is a function of t; at the right hand end of this domain there is a steep front (a discontinuity), moving with the velocity $dL/dt = L/2t$. It is easily found that we have:

$$L = 2\sqrt{L_0 v_0 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

With increasing values of t the front decreases in height; at the same time its velocity decreases.

When the influence of the frictional term $\nu \partial^2 v/\partial y^2$ on the form of the steep front is investigated, it is found that the maximum value of $\partial v/\partial y$ is of the order v^2/ν.

It is to be observed that the integral:

$$\Omega = \int v \, dy \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

remains constant during the whole process; this is true also when the frictional term is not neglected, and represents an analogy to the conservation of the impulse in the hydrodynamical case.

The equation for the motion of the front can be written:

$$L = 2 \sqrt{\Omega \, t} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

5. It is possible to develop solutions of similar nature from other initial conditions, and it can be expected that after a sufficient lapse of time we shall always obtain a solution of the type:

$$v = (y - y_0)/2 \, (t - t_0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

where y_0 and t_0 are two constants, depending upon the initial conditions. This solution will be valid in a domain extending from $y = y_0$ until $y = y_0 + L$, the quantity L satisfying the equation:

$$L = 2 \sqrt{\Omega (t - t_0)} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

where Ω is the constant value of the integral $\int v \, dy$. The quantity L may be either positive or negative. The steep front at $y = y_0 + L$ is rounded off by the influence of the viscosity, and the maximum value of $\partial v/\partial y$ again is of the order v^2/ν.

The asymmetrical character of the growth of the domain where v differs from zero, is an accidental circumstance due to the particular form of equation (17). When we return to the system formed by eqs. (1), (taking $U = 0$), in which there are two variables, there is found a more symmetrical growth of the domains where v and w are different from zero, but the exact investigation will be far more difficult.

Returning to the case of eq. (17) or (19) it is still to be observed that various of the growing domains may meet each other. For instance, when we have two domains with positive values of v, and the left hand one has the greater Ω, this one will overtake the other. After a sufficient lapse of time there will be left a single domain only, again of the type described in the beginning of this section, and characterized by a value of Ω which is the sum of the Ω's of the original domains.

Another case may be formed by two domains of different sign, situated in such a way that the one with v positive is to the left of the one with v

negative. When they have met, then after a sufficient lapse of time again only one domain will be left, characterized by a value of Ω which is the difference of the Ω's of the original regions.

We thus arrive at the general result that there is a tendency for all domains where some disturbance is present (that is, where at $t = 0$, v, or both v and w in the system with two variables, are different from zero), to increase in size, at a rate approximately proportional to $\sqrt{t}$. In this process the larger domains overrun the smaller ones, and consequently more and more of the details of the original pattern will be gradually eliminated. Hence it is to be expected that the average size of the "domains of coherence" to be found in the field will increase as well, and also roughly proportionally to $\sqrt{t}$.

A particularly interesting feature of the process is the tendency to form steep fronts at the advancing edges of the domains. The steep fronts are the sources of intensive dissipation of energy. When ν is small, the dissipation in these fronts is far more important than the dissipation due to the values $\partial v/\partial y$ assumes in the rest of the domains.

This result is remarkable as again it affords an analogy with what is observed in fluid motion, although the geometrical features of the field are different in the hydrodynamical case. It has been pointed out by TAYLOR that in turbulent motion the intensity of the vorticity is always increased in those parts of the field, where vortex filaments are extended, as according to the law of the conservation of circulation the absolute value of the vorticity changes proportionally to the length of a filament having the same direction as the vorticity vector. As TAYLOR remarks turbulent motion is found to be diffusive, so that particles which were originally neighbours move apart as the motion proceeds; consequently there must be a continuous increase of the vorticity [11]). In TAYLOR's view

---

11) G. I. TAYLOR, Journ. Aeron. Sciences **4**, p. 315, 1937; G. I. TAYLOR and A. E. GREEN, Proc. Roy. Soc. (London) A **158**, p. 501, 1937; G. I. TAYLOR, *ibid.* A **164**, p. 15, 1938.

In order to obtain an estimate of the minimum thickness to which a vortex can be drawn out, we may consider a field of fluid motion, which, when described with reference to cylindrical coordinates r, ϑ, z, possesses the velocities:

$$v_r = -Ur; \quad v_\vartheta = u(t, r); \quad v_z = +2Uz,$$

where U is a constant. This field satisfies the equation of continuity. As u has been assumed to be independent of z, the only vorticity component is:

$$\gamma_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (ur)}{\partial r}.$$

When the pressure is taken equal to:

$$p = -\frac{1}{2}\varrho U^2 (r^2 + 4z^2) + \varrho \int dr\, (u^2/r)$$

this process represents the fundamental mechanical cause which controls the dissipation of energy in turbulent motion.

It will be evident that TAYLOR's result, connected as it is with the laws governing vortex motion, is a typical effect due to the presence of terms of the *second degree* in the hydrodynamical equations. Notwithstanding the difference in geometrical character, the model system in this respect shows a similar behaviour: also here there are present terms of the second degree, which bring about the tendency to produce steep fronts, and these are the loci of high values of the gradient $\partial v/\partial y$ and consequently of intensive dissipation.

6. *Conclusive remark.* — The results of the preceding discussion, taken together with the investigations of the previous paper, can be summarized by saying that the model system in a simplified way possesses the essential features which are governing the energetical relations of the hydrodynamical system. It would appear therefore that a further investigation of the statistical character of the solutions of eqs. (1), in particular in the case where the domain of the coordinate y is bounded and where boundary conditions are applied to the variables v and w, certainly will be worth while; should it have success, then it is to be expected that it will bring out features which will be helpful in the analysis of some of the still existing riddles of turbulent fluid motion.

the equations of motion for the directions r and z are satisfied. We write $\sigma = u\,r$; then the equation for the ϑ-direction takes the form:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = Ur\,\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right).$$

It must be expected that the solution of this equation asymptotically will approach to a form in which σ is a function of r only. This function then must satisfy the equation:

$$\nu\,\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \left(Ur - \frac{\nu}{r}\right)\frac{d\sigma}{dr} = 0.$$

The solution appropriate to our case is: $\sigma = C(1 - e^{-r^2 U/2\nu})$, where $2\pi C$ represents the strength (circulation) of the vortex. We then obtain for the vorticity:

$$\gamma = \frac{CU}{\nu}\,e^{-r^2 U/2\nu}.$$

The dissipation, calculated per unit of height in the z-direction, is found to have the value:

$$\mu \int_0^\infty 2\pi\, r\, \gamma^2\, dr = \pi \varrho\, C^2\, U.$$

It is interesting to observe that here again — the same as in the case of the discontinuities of the model system (see J. M. BURGERS, *l.c.* pp. 26, 43) — the dissipation is given by an expression which is independent of the viscosity, and which is of the third degree with respect to the velocity components of the motion ($v_r = -Ur$; $v_\vartheta = u = C/r$ outside of the vortex proper).

Mathematics. — *Ein Satz über assoziierte Geraden im R_4.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Zu je vier Geraden allgemeiner Lage im R_4 lässt sich auf lineare Weise eine fünfte Gerade konstruieren, was zu der bekannten Figur von fünf assoziierten Geraden führt.

Ich beweise hier zweierlei. Erstens, dass fünf assoziierte Geraden allgemeiner Lage nicht Erzeugende derselben Quadrik F_2 im R_4 sein können und zweitens, dass die fünfte Gerade der Ort der Kegelspitzen ist für alle dreidimensionalen Kegel zweiter Ordnung, die die vier ersten Geraden enthalten.

§ 1. *Die assoziierte Gerade.*

Sind 1, 2, 3 und 4 vier Geraden im R_4 mit den Koordinaten

$$a_{ik},\ \alpha_{ik},\ p_{ik} \text{ und } m_{ik},$$

so ist

$$(x\,S'_{12}) = (x\,a^2\,\alpha^2) = 4\,.\,\Sigma\,x_1\,a_{23}\,\alpha_{45} = 0$$

die Gleichung des R_3, der 1 und 2 verbindet. Die drei Räume S'_{12}, S'_{23} und S'_{31} schneiden sich in einer Geraden 4^*, die mit 4 verbunden den Raum $4'$ liefert. Dann gehen die vier Räume $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ durch dieselbe Gerade: die assoziierte zu 1, 2, 3, 4. Ihre Gleichung lautet, wenn

$$G_1 = (\pi^3\,a^2) = 0\ ,\ \ G_2 = (\pi^3\,\alpha^2) = 0, \ldots$$

die Gleichungen der vier Geraden 1, 2, 3 und 4 sind [1]):

$$G_5 = \frac{G_1}{A_1} + \frac{G_2}{A_2} + \frac{G_3}{A_3} + \frac{G_4}{A_4} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Invarianten A_i sind hier die vier unabhängigen Invarianten der Geraden 1 bis 4 und gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (m\,S'_{13})\ \ (m\,S'_{12}) \\ A_2 &= (a\,S'_{23})\ \ (a\,S'_{24}) \\ A_3 &= (\alpha\,S'_{13})\ \ (\alpha\,S'_{34}) \\ A_4 &= (p\,S'_{14})\ \ (p\,S'_{24}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Bezeichnung ist hier so gewählt, dass in (1) alle Glieder das

[1]) Vgl. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 248 (1939).

positive Zeichen erhalten. Hier enthält A_i die Koordinaten der i-ten Geraden im zweiten, die der anderen drei Geraden im ersten Grade. Es gilt überdies:

$$A_1 = A_{4,13,12} = -A_{3,41,12} = -A_{2,13,41} = (m\,a^2\,p^2)\,(m\,b^2\,a^2). \quad . \quad (3)$$

Die geometrische Bedeutung von $A_1 = 0$ ist leicht anzugeben: die beiden dreidimensionalen Räume S'_{13} und S'_{12} schneiden sich in einer durch die Gerade 1 gehenden Ebene E; ist $A_1 = 0$, so trifft diese Ebene E die Gerade 4. Die Gleichung von E in veränderlichen Linienkoordinaten π_{ik} ist durch

$$A_{\pi,13,12} = (\pi\,a^2\,p^2)\,(\pi\,b^2\,a^2) = 0$$

gegeben. Nehmen wir dagegen in A_1 die Grössen $a_{ik} = b_{ik}$ als Veränderliche $\pi_{ik} = \varrho_{ik}$ an, so stellt

$$(m\,\pi^2\,p^2)\,(m\,\varrho^2\,a^2) = 0$$

einen quadratischen Linienkomplex dar. Er ist der Ort derjenigen Geraden π_{ik}, durch die eine Ebene gelegt werden kann, die die drei Geraden a_{ik}, p_{ik} und m_{ik} schneidet.

Ich habe vor kurzem [2]) die Bedingung dafür angegeben, dass fünf Geraden 1 bis 5 im R_4 Erzeugende derselben Quadrik F_2 sind. Sie lautet

$$\triangle = A_{5,34,23}\,A_{5,13,12}\,A_{5,14,42} + A_{5,42,34}\,A_{5,14,12}\,A_{5,13,23} = 0. \quad . \quad (4)$$

Nehmen wir als fünfte Gerade die durch (1) gegebene assoziierte, so ergibt sich

$$\triangle = \frac{A_{1,34,23}}{A_1} \cdot \frac{A_{4,13,12}}{A_4} \cdot \frac{A_{3,14,42}}{A_3} + \frac{A_{1,42,34}}{A_1} \cdot \frac{A_{3,14,12}}{A_3} \cdot \frac{A_{4,13,23}}{A_4},$$

also, nach (3):

$$\triangle = \frac{A_3\,A_1\,A_4}{A_1\,A_4\,A_3} + \frac{A_4\,A_1\,A_3}{A_1\,A_3\,A_4} = 2 \neq 0,$$

d.h. fünf assoziierte Geraden sind nicht Erzeugende derselben F_2 im R_4.

§ 2. *Die Flächen F_λ.*

Die sechs linearen Räume $S'_{ik} = S'_{ki}$

$$S'_{12}\ ,\ S'_{13}\ ,\ S'_{14}\ ,\ S'_{34}\ ,\ S'_{42}\ ,\ S'_{23} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S')$$

gestatten es, ein System von ∞^2 Quadriken $F_\lambda = 0$ zu bilden, die alle vier Geraden enthalten:

$$F_\lambda = \lambda\,(x\,S'_{12})\,(x\,S'_{34}) + \mu\,(x\,S'_{13})\,(x\,S'_{42}) + \nu\,(x\,S'_{14})\,(x\,S'_{23}) = 0. \quad . \quad (5)$$

Neben den vier Geraden 1 bis 4 enthält F_λ die vier Geraden 1* bis 4*,

---

[2]) Vgl. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 4 (1939).

wo z.B. 4^* die Transversale von 1, 2 und 3 ist. Alle F_λ gehen somit durch die acht Geraden 1 bis 4 und 1^* bis 4^*.

Wir zeigen zuerst, dass sich jede Quadrik F_2, die die vier Geraden 1 bis 4 enthält, in der Gestalt (5) schreiben lässt. Wir setzen $A_1 A_2 \neq 0$ voraus. Dann bilden die fünf Räume

$$S'_{12} \ , \ S'_{13} \ , \ S'_{14} \ , \ S'_{42} \ , \ S'_{23} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

ein Simplex, das wir als Koordinatensimplex wählen. Jede Quadrik F_2 lässt sich dann in der Gestalt darstellen

$$F = f_{11} (x S'_{12})^2 + 2 f_{12} (x S'_{12}) (x S'_{13}) + \ldots + f_{55} (x S'_{23})^2 = 0 , \quad . \quad (7)$$

wo die f_{ik} Zahlenkoeffizienten sind.

Wenn die Gerade 1 auf F liegen soll, so muss das Polynom F verschwinden, wenn wir in (7)

$$(x S'_{12}) = 0 \ , \ (x S'_{13}) = 0 \text{ und } (x S'_{14}) = 0$$

setzen. Dies gibt

$$f_{44} = f_{45} = f_{55} = 0.$$

Auf dieselbe Art erhält man bei der Geraden 2:

$$f_{22} = f_{23} = f_{33} = 0.$$

Es bleibt also:

$$\left.\begin{aligned} F = {} & f_{11} (x S'_{12})^2 + 2 f_{12} (x S'_{12}) (x S'_{13}) + 2 f_{13} (x S'_{12}) (x S'_{14}) + \\ & + 2 f_{14} (x S'_{12}) (x S'_{24}) + 2 f_{15} (x S'_{12}) (x S'_{23}) + 2 f_{24} (x S'_{13}) (x S'_{24}) + \\ & + 2 f_{25} (x S'_{13}) (x S'_{23}) + 2 f_{34} (x S'_{14}) (x S'_{24}) + 2 f_{35} (x S'_{14}) (x S'_{23}) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (7a)$$

Die Gerade 3 ist gegeben durch den Schnitt der drei Räume

$$(x S'_{31}) = 0 \ , \ (x S'_{32}) = 0 \ , \ (x S'_{34}) = 0. \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

Hier kommt der letzte dieser Räume nicht in (6) vor, man muss ihn also zuerst linear und homogen durch die fünf Räume (6) ausdrücken. Dies geschieht durch die Identität

$$\Sigma \, (S'_{13} \, S'_{14} \, S'_{34} \, S'_{42} \, S'_{23}) \, (x S'_{12}) = \Sigma \, \Omega_{12} \, (x S'_{12}) = 0,$$

wobei sich die sechs Invarianten Ω_{ik}, die fünfreihigen Minoren der Matrix

$$\| \, S'_{12} \, S'_{13} \, S'_{14} \, S'_{34} \, S'_{42} \, S'_{23} \, \|$$

durch die vier Invarianten A_i wie folgt ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= -4 A_3 A_4 & \qquad \Omega_{34} &= -4 A_1 A_2 \\ \Omega_{13} &= -4 A_2 A_4 & \qquad \Omega_{42} &= -4 A_1 A_3 \\ \Omega_{14} &= -4 A_2 A_3 & \qquad \Omega_{23} &= -4 A_1 A_4 \end{aligned}$$

Hiermit findet man die gesuchte Darstellung für den sechsten Raum S'_{34}

$$-S'_{34} = S'_{12} \cdot \frac{A_3 A_4}{A_1 A_2} + S'_{13} \cdot \frac{A_4}{A_1} + S'_{14} \cdot \frac{A_2}{A_4} + S'_{42} \cdot \frac{A_3}{A_4} + S'_{23} \cdot \frac{A_4}{A_2} . \quad (9)$$

Gilt (8), dann ist also in (7a) zu setzen

$$(x S'_{12}) \cdot \frac{A_3 A_4}{A_1 A_2} = -(x S'_{14}) \cdot \frac{A_2}{A_4} - (x S'_{24}) \cdot \frac{A_3}{A_4} .$$

Dies liefert mit (8) zusammen für die Koeffizienten f_{ik} die weiteren Beziehungen

$$f_{34} = 0 \ , \ f_{14} = \frac{A_1 A_2}{2 A_4^2} \cdot f_{11} \ , \ f_{13} = \frac{A_1 A_2^2}{2 A_3 A_4^2} \cdot f_{11} .$$

Auf die gleiche Art führt die Bedingung, dass F die vierte Gerade enthält, also für

$$(x S'_{14}) = 0 \ , \ (x S'_{24}) = 0 \text{ und } (x S'_{34}) = 0$$

zu den Gleichungen

$$f_{25} = 0 \ , \ f_{15} = \frac{A_1}{2 A_3} \cdot f_{11} \ , \ f_{12} = \frac{A_2}{2 A_3} \cdot f_{11} .$$

Setzen wir dies alles in (7a) ein und setzen überdies

$$\lambda = -f_{11} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_3 A_4} \ , \ \mu = 2 f_{24} \ , \ \nu = 2 f_{35} ,$$

so geht (7a) schliesslich über in (5).

§ 3. *Die Kegel* F_λ.

Wir nehmen jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_6$ als überzählige homogene Koordinaten im R_4 und denken uns die Relation (9) in der einfacheren Gestalt

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

festgehalten, wobei wir die sechs Räume (S') in der Reihenfolge

$$S'_{12} \ , \ S'_{34} \ , \ S'_{13} \ , \ S'_{24} \ , \ S'_{14} \ , \ S'_{23}$$

von 1 bis 6 nummeriert denken. Die quadratischen Formen (5) bekommen dann die Gestalt

$$F_\lambda = \lambda x_1 x_2 + \mu x_3 x_4 + \nu x_5 x_6 \text{ mit } x_6 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 . \quad (11)$$

Bei dieser Bezeichnung ist die erste Gerade 1 gegeben als Schnitt der drei Räume

$$x_1 = 0 \ , \ x_3 = 0 \ , \ x_5 = 0 ;$$

ihre Koordinaten a_{ik} können also aus der Matrix

$$a_{ik} \ldots . \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

berechnet werden. Analog findet man für die drei weiteren Geraden 2, 3 und 4:

$$a_{ik} \ldots . \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad p_{ik} \ldots . \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad m_{ik} \ldots . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

sodass also die Gleichungen der vier Geraden werden:

$$\pi'_{24} = 0; \ \pi'_{23} - \pi'_{25} + \pi'_{35} = 0; \ \pi'_{14} - \pi'_{15} + \pi'_{45} = 0; \ \pi'_{13} = 0. \quad . \quad (12)$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (x S'_{12}) &= \ \ x_1 & \qquad (x S'_{34}) &= \ \ x_2 \\ (x S'_{13}) &= \ \ x_3 & \qquad (x S'_{42}) &= \ \ x_4 \\ (x S'_{14}) &= -x_5 & \qquad (x S'_{23}) &= -x_6 \end{aligned}$$

und für die vier Invarianten A_i erhalten wir

$$A_1 = -1 \ , \ A_2 = +1 \ , \ A_3 = +1 \ , \ A_4 = -1.$$

Hiermit wird die Gleichung der assoziierten Geraden nach (1) und (12)

$$G_5 \ldots . \ \pi'_{13} + \pi'_{14} - \pi'_{15} + \pi'_{23} + \pi'_{24} - \pi'_{25} + \pi'_{35} + \pi'_{45} = 0. \quad . \quad (13)$$

Nach (11) haben wir als Diskriminante der Form F_λ der fünf Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$:

$$2^5 . D = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & -\nu \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\nu \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -\nu \\ -\nu & -\nu & -\nu & -\nu & -2\nu \end{vmatrix} = -2\lambda\mu\nu(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu). \quad . \quad (14)$$

Nehmen wir also $\lambda\mu\nu \neq 0$, so sind durch

$$\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0 \text{ oder } \nu = -\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

die Kegel F_λ gegeben. Die Spitze eines Kegels bekommt die Koordinaten

$$\mu : \mu : \lambda : \lambda : -(\lambda + \mu) = 1 : 1 : \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda}{\mu} : -\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

also, für $\frac{\lambda}{\mu} = \sigma$:

$$1 : 1 : \sigma : \sigma : -(1 + \sigma).$$

Nach (13) ist der Ort der Spitzen also die assoziierte Gerade G_5.

Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der Systeme* PFAFFscher *Gleichungen. I. Ein Theorem über die Klassen der Faktoren eines Systems.* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

1. *Einleitung.*

Ein System von q PFAFFschen Gleichungen in n Variablen

$$\overset{x}{w}_\lambda dx^\lambda = 0; \quad x = p+1, \ldots, n; \quad p = n-q. \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

oder

$$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} dx^{\lambda q} = 0; \quad w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} = \overset{p+1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{n}{w}_{\lambda_q]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

stellt bekanntlich ein p-Richtungsfeld in einer X_n dar. Wir nennen den bis auf einen skalaren Faktor bestimmten einfachen kovarianten q-Vektor $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ den *kovarianten q-Vektor des Systems* und jeden möglichen Teiler w_λ von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ einen *Faktor des Systems.* Unter *Klasse* eines Faktors w_λ verstehen wir die Klasse der Gleichung $w_\lambda dx^\lambda = 0$, die bekanntlich stets ungerade und $\leqq n$ ist. Ein Gradientvektor hat also die Klasse 1 und allgemein ein Vektor von der Form

$$w_\lambda = \partial_\lambda \overset{1}{s} + \overset{2}{f} \partial_\lambda \overset{2}{s} + \ldots \overset{u}{f} \partial_\lambda \overset{u}{s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo $\overset{2}{f}, \ldots, \overset{u}{f}, \overset{1}{s}, \ldots, \overset{u}{s}$ funktional unabhängig sind, die klasse $2u-1$.

Sind $\underset{b}{v^\varkappa}$, $(b = 1, \ldots, p)$, p linear unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$v^\mu \overset{x}{w}_\mu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so lautet bekanntlich das System von p partiellen Differentialgleichungen, das dem System (1) adjungiert ist

$$\underset{b}{v^\mu} \partial_\mu f = 0; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

oder

$$v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \partial_{\varkappa_p} f = 0; \quad v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \underset{1}{v^{[\varkappa_1}} \ldots \underset{p}{v^{\varkappa_p]}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

oder in der LIEschen Bezeichnungsweise

$$X_b f = 0; \quad X_b = \underset{b}{v^\mu} \partial_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4c)$$

Der bis auf einen skalaren Faktor bestimmte einfache p-Vektor $v^{x_1 \ldots x_p}$ heisst der *kontravariante p-Vektor des Systems.*

Ist das System *vollständig integrabel*, so sind die Operatoren (LIEsche Klammerausdrücke)

$$(X_a\, X_b) = X_{ab} = X_a X_b - X_b X_a = 2\,(v^{\nu}_{[a}\, \partial_{\nu}\, v^{\mu}_{b]})\, \partial_{\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

linear abhängig von den X_a. Ist dies nicht der Fall, so bildet man weitere Klammerfaktoren, bis schliesslich ein in dieser Weise nicht mehr erweiterungsfähiges System von $r \geqq p$ linear unabhängigen Operatoren entsteht. Ist $r = n$, so ist das System *nicht integrabel*, ist aber $r < n$, so besitzt es gerade $n - r$ funktional unabhängige Lösungen. Diese Lösungen bilden ein System von ∞^{n-r} X_r, deren r-Richtung in jedem Punkte die p-Richtung des Richtungsfeldes enthält. Man sagt dann, dass das Richtungsfeld X_r-*enthalten* ist.

Man sagt, dass das Richtungsfeld X_m-*bildend* ist, $m \leqq p$, wenn es im betrachteten Gebiet ein System von ∞^{n-m} X_m gibt, deren m-Richtung in der p-Richtung des p-Richtungsfeldes enthalten ist. Ein vollständig integrabeles System ist also sowohl X_p-bildend als X_p-enthalten. Der grösste Wert μ, den m annehmen kann, ist $p - \sigma$, σ heisst nach J. H. THOMAS die Spezies des Gleichungssystems.[1]) Ist das X_μ-bildende μ-Richtungsfeld gegeben durch das Gradientprodukt (alternierendes Produkt von Gradientvektoren)

$$s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}} = s^{1}_{[\lambda_1} \ldots s^{n-\mu}_{\lambda_{n-\mu}]}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so ist offenbar $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ ein Teiler von $s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}$ und nach dem bekannten Auswahlsatz muss es also unter den Gradientvektoren s_λ eine Anzahl $n - \mu - q$ geben, die mit $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ (alternierend) multipliziert bei richtiger Wahl des freien skalaren Faktors in $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ gerade $s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}$ erzeugen

$$w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_q}\, s^{1}_{\lambda_{q+1}} \ldots s^{v}_{\lambda_{n-\mu}]} = s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}; \quad v = n - \mu - q = p - \mu \quad . \quad . \quad (7)$$

Daraus geht aber hervor, dass man stets $p - \mu + 1$ Gradientvektoren angeben kann, deren Produkt mit $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ multipliziert Null erzeugt und aus diesem Umstande folgt, dass sich die Faktoren w^{x}_{λ} ersetzen lassen durch q andere Faktoren, von denen ein jeder sich als eine Summe von Vielfachen von höchstens $p - \mu + 1$ Gradientvektoren schreiben lässt. Die Klasse jedes dieser Faktoren ist also $\leqq 2\,(p - \mu) + 1$, und es ist damit bewiesen, dass sich jedes System von q PFAFFschen Gleichungen in n Variablen ersetzen lässt durch ein System von q Gleichungen, deren Klasse höchstens $2\,(p - \mu) + 1$ ist. Da für ein "allgemeines" System der Genus bekanntlich gleich $\left\lfloor \frac{n}{q+1} \right\rfloor$ ist[2]), folgt als sehr rohe Abschätzung,

[1]) Ist g der Genus (genre) des Systems nach CARTAN, so ist also stets $\mu \geqq g$.

[2]) E. GOURSAT, Leçons sur le problème de PFAFF, S. 362.

dass sich ein "allgemeines "System stets auf ein System von Gleichungen zurückführen lässt, deren Klasse $\leqq 2\left(p-\left[\frac{n}{q+1}\right]\right)+1$ ist.

Dies sind bekannte Tatsachen. Darüber hinaus stellen wir jetzt das Theorem auf:

Jedes System von q PFAFFschen Gleichungen in n Variablen, ist gleichwertig mit einem System von q Gleichungen, deren Klasse für $p=n-q$ ungerade höchstens gleich p und für p gerade höchstens gleich $p+1$ ist [1]).

Das Theorem ist trivial für $q=1$ und für $q=n-1$. Der Beweis für $q=2$ ist so einfach, das er hier nicht erörtert werden soll. Wir bringen hier den Beweis für $q=n-2$, $q=n-3$ und $q=n-4$. Der Beweis für $q=n-5$ und $q=n-6$ folgt in der zweiten Mitteilung. Für die übrigen Fälle ist das Theorem vorläufig noch eine Vermutung.

Es stellt sich heraus, dass das Problem sich zurückführen lässt auf die Theorie der Systeme von *homogenen multilinearen partiellen Differentialgleichungen* von der Form

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \begin{array}{ccccc} X_1{}^1p & X_1{}^2p & . & . & X_1{}^up \\ X_2{}^1p & . & . & . & X_2{}^up \\ \vdots & & & & \\ X_p{}^1p & . & . & . & X_p{}^up \end{array} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u; \\ u \leqq {}^1/_2(p+1) \end{array}\right\}. \quad (8)$$

die als natürliche Verallgemeinerungen der Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen ($u=1$) erscheinen. Wir erhalten einen Satz über die Anzahl der unabhängigen Lösungssysteme solcher Gleichungssysteme und anschliessend einen Satz über die möglichen Anfangsbedingungen der Lösungen. In dieser Mitteilung werden die Fälle $u=2$, $p=2$ und 3, $u=3$, $p=4$ behandelt.

2. *Beweis für $q=n-2$.*

Jedes System von $(n-1)$ PFAFFschen Gleichungen ist bekanntlich vollständig integrabel, d.h. jedes kovariante $(n-1)$-Vektorfeld ist bis auf einen skalaren Faktor Gradientprodukt. Geometrisch: jedes 1-Richtungsfeld ist X_1-bildend. Ist also q_λ ein Gradientvektor, der kein Faktor von $w_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}}$ aber übrigens beliebig ist, so ist $w_{[\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}}q_{\lambda]}$ ein Gradientprodukt [2])

$$w_{[\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}}q_{\lambda]} = \overset{1}{p}_{[\lambda_1}\ldots\overset{n-2}{p}_{\lambda_{n-2}}q_{\lambda]}; \quad \overset{\chi}{p}_\lambda = \partial_\lambda \overset{\chi}{p}; \quad \chi = 1,\ldots,n-2,. \quad (9)$$

---

[1]) Es muss also jedenfalls $2\left(p-\left[\frac{n}{q+1}\right]\right)+1 \geqq p$ für ungerades p und $\geqq p+1$ für gerades p sein, eine Tatsache von der man sich leicht überzeugt.

[2]) Richtige Wahl des freien skalaren Faktors natürlich vorausgesetzt.

und daraus geht hervor, dass sich jeder der Gradientvektoren $\overset{\varkappa}{p}_\lambda$ als Summe von Vielfachen der $\overset{\varkappa}{w}_\lambda$ und q_λ schreiben lässt. So entstehen gerade $n-2$ lineare Kombinationen der $\overset{\varkappa}{w}_\lambda$, die Summe von Vielfachen von q_λ und *einem* der $\overset{\varkappa}{p}_\lambda$ sind, und deren Produkt, bei richtiger Wahl des skalaren Faktors in $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}}$ gleich $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}}$ ist. Damit sind aber die gewünschten Faktoren der Klasse 3 hergestellt und man kann also $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}}$ folgendermassen schreiben

$$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}} = (\overset{1}{p}_{[\lambda_1} + f \overset{1}{q}_{[\lambda_1}) \ldots (\overset{n-2}{p}_{\lambda_{n-2}]} + f \overset{n-2}{q}_{\lambda_{n-2}]}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Darstellung erhält noch $(2n-3)$ beliebige Funktionen. Nun ist die höchste Anzahl der unabhängigen Bestimmungszahlen eines bis auf ein skalaren Faktor gegebenen einfachen $(n-2)$-Vektors bekanntlich $2n-4$, sodass noch eine Funktion zu viel vorhanden ist [1]).

Wir fragen jetzt, welche Bedingungen man einem Faktor von der Form $\lambda\, \partial_\lambda p + \mu\, \partial_\lambda q$ in einem einzigen Punkt der X_n auferlegen kann. p und q genügen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und umgekehrt führt jedes Lösungssystem dieser Gleichung zu einem Faktor der Klasse $\leqq 3$. Bei der Bildung der Gradientvektoren war der zuerst gewählte Gradientvektor q_λ beliebig bis auf die Bedingung $w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}} q_{\lambda]} \neq 0$, d.h. es sollten nicht $\overset{\lambda}{v}_1 q_\lambda$ und $\overset{\lambda}{v}_2 q_\lambda$ gleichzeitig verschwinden. Die sodann eingeführten Gradientvektoren $\overset{\varkappa}{p}_\lambda$ hatten nur der Bedingung $v^{\varkappa\lambda} q_\varkappa \overset{\varkappa}{p}_\lambda = 0$ zu genügen. Den trivialen Fall $v^{\varkappa\lambda} p_\lambda = 0$ beiseite lassend, ergibt sich bei *fest* gewähltem q_λ für p_λ die lineare homogene partielle Differentialgleichung

$$(\overset{\mu}{v}_1 q_\mu)(\overset{1}{v}_2 \partial_1 + \ldots + \overset{n}{v}_2 \partial_n) p - (\overset{\mu}{v}_2 q_\mu)(\overset{1}{v}_1 \partial_1 + \ldots + \overset{n}{v}_1 \partial_n) p = 0 \quad (12)$$

und diese Gleichung hat $n-1$ funktional unabhängige Lösungen, die triviale $p = q$ und die $\overset{\varkappa}{p}$. Nun kann man bekanntlich stets eine Lösung so wählen, dass in $x^\varkappa = \overset{\varkappa}{x}_0$ der Gradientvektor p_λ dort mit einem beliebigen in diesem Punkte vorgegeben Vektor P_λ zusammenfällt, vorausgesetzt dass dort

$$v^{\varkappa\lambda} P_\varkappa q_\lambda = 0 \; ; \; v^{\varkappa\lambda} P_\lambda \neq 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist. Zusammenfassend ergibt sich also der Satz:

[1]) In der zweiten Mitteilung zeigen wir, dass das Haupttheorem für $q = n-3$ es ermöglicht diese überflüssige Funktion zu beseitigen und somit eine Normalform für $q = n-2$ herzustellen.

Das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \end{vmatrix} = 0 \text{ oder: } \left.\begin{aligned} \lambda X_1 p + \mu X_1 q &= 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q &= 0 \end{aligned}\right\}; \; X_b = \overset{\mu}{v}_b \partial_\mu; \; b = 1, 2. \quad (14)$$

in n Variablen besitzt mindestens ein System von $n-2$ Lösungssystemen $\overset{\xi}{p}, \overset{\xi}{q}$, $(\xi = 1, \ldots, n-2)$, deren zugehörige Vektoren $\overset{\xi}{\lambda}\, \overset{\xi}{p}_\lambda + \mu\, \overset{\xi}{q}_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von zwei Vektoren P_λ, Q_λ in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen

$$v^{\varkappa\lambda} P_\varkappa Q_\lambda = 0 \quad ; \quad v^{\varkappa\lambda} P_{[\varkappa} Q_{\mu]} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches $p_\lambda = P_\lambda$, $q_\lambda = Q_\lambda$ ist in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$.

3. *Beweis für $q = n-3$.*

Die Methode, die für $q = n-2$ verwendet wurde, würde hier nur zu Faktoren der Klasse 5 statt der Klasse 3 führen. Es kommt darauf an ein System von $n-3$ linear unabhängigen Vektoren von der Form

$$w_\lambda = \partial_\lambda p + \mu\, \partial_\lambda q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

zu finden, die den drei Gleichungen

$$\overset{\lambda}{v}_b \partial_\lambda p + \mu\, \overset{\lambda}{v}_b \partial_\lambda q = 0 \quad ; \quad b = 1, 2, 3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

oder auch

$$X_b p + \mu\, X_b q = 0 \quad ; \quad b = 1, 2, 3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17b)$$

genügen. Da sich die eventuell vorhandenen Lösungen der Gleichungen $X_b f = 0$ auf bekanntem Wege bestimmen lassen, betrachten wir hier nur solche Lösungen für welche $X_b p \neq 0$ und $X_b q \neq 0$ ist. Elimination von μ ergibt

$$(X_{[a} p)\, X_{b]} q = 0 \quad ; \quad a, b = 1, 2, 3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Durch lineare Transformation der $\overset{\varkappa}{v}_b$ in $\overset{\varkappa}{v}_\xi$, $\xi = 1, 2, 3$, lässt sich immer erreichen[1]) dass

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 + \overset{4}{v}_1 \partial_4 + \ldots + \overset{n}{v}_1 \partial_n \\ X_2 &= \partial_2 + \overset{4}{v}_2 \partial_4 + \ldots + \overset{n}{v}_2 \partial_n \\ X_3 &= \partial_3 + \overset{4}{v}_3 \partial_4 + \ldots + \overset{n}{v}_3 \partial_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

wird. Sind die Operatoren X_{23}, X_{31} und X_{12} alle identisch gleich Null,

[1]) Durch Koordinatentransformation kann man ausserdem noch stets erreichen, dass $X_1 = \partial_1$, also $\overset{\varkappa}{v}_1 = \overset{\varkappa}{e}_1$ wird. Diesen Umstand brauchen wir hier noch nicht zu verwenden.

so ist das System $X_1 f = 0$ vollständig integrabel und es gibt sogar $n-3$ linear unabhängige Faktoren der Klasse 1. Diesen Fall können wir also ausschliessen und ohne der Allgemeinheit zu schaden annehmen es sei $X_{23} \neq 0$. Wir bemerken noch dass X_{23}, X_{31} und X_{12} keine Differentiationen nach x^1, x^2 oder x^3 enthalten. Statt (18) betrachten wir nun das gleichwertige Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} a) & \left.\begin{array}{l} X_1 p = \sigma X_2 p \\ X_1 q = \sigma X_2 q \end{array}\right\} X_2 p \neq 0 \; ; \; X_2 q \neq 0. \\ b) & (X_{12} p) X_{31} q = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Sind dann p und q Lösungen von (20a), so gilt für

$$\theta = 2 (X_{12} p) X_{31} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

folgende Differentialgleichung

$$X_1 \theta - X_2 (\sigma \theta) = \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wo

$$\left.\begin{array}{r} \zeta = (X_{12} p) X_3 q - (X_3 p) X_{12} q + \\ + (X_{31} p) X_2 q - (X_2 p) X_{31} q + \sigma \{ (X_{23} p) X_2 q - (X_2 p) X_{23} q \} \end{array}\right\} \quad (23)$$

Sollen nun p und q auch Lösungen von (20b) sein, so müssen sie den Ausdruck θ Null machen, und es muss also jedenfalls ζ verschwinden. Die Gleichnng $\zeta = 0$ kann nun benutzt werden um σ aus den Gleichungen (20a) fort zu schaffen, vorausgesetzt, dass der Koeffizient von σ in (23) nicht Null sei. Wir erhalten dann zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 p = \sigma X_2 p - \overset{4}{v}_1 \partial_4 p - \ldots - \overset{n}{v}_1 \partial_n p \\ \partial_1 q = \sigma X_2 q - \overset{4}{v}_1 \partial_4 p - \ldots - \overset{n}{v}_1 \partial_n p \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

mit der Nebenbedingung

$$(X_{23} p) X_2 q - (X_2 p) X_{23} q \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (24) enthalten keine Differentiationen nach x^1 und alle vorkommenden Ableitungen sind von der ersten Ordnung. Sind die Koeffizienten also regulär in der Umgebung von $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$, so gibt es, vorläufig abgesehen von der Nebenbedingung, nach CAUCHY–KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (24), das für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ übergeht in die beliebigen Funktionen der $x^2, \ldots, x^n$

$$\left.\begin{array}{l} p (\overset{0}{x}{}^1, x^2, \ldots, x^n) = \overset{0}{p} (x^2, \ldots, x^n) \\ q (\overset{0}{x}{}^1, x^2, \ldots, x^n) = \overset{0}{q} (x^2, \ldots, x^n) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wir müssen nun aber diese Funktionen so wählen, dass für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ die Nebenbedingung (die keine Differentiationen nach x^1 enthält)

$$(X_{23}\overset{0}{p})_0\,(X_2\overset{0}{q})_0 - (X_2\overset{0}{p})_0\,(X_{23}\overset{0}{q})_0 \neq 0\ ;\ (\,)_0 = \text{Wert von } (\,) \text{ für } x^1 = \overset{0}{x}{}^1 \quad (27)$$

erfüllt ist, da sich sonst σ schon für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ nicht aus $\zeta = 0$ lösen liesse.

Gilt aber (27), so ist die Existenz eines einzigen Lösungssystem von (24), das auch (25) und (26) erfüllt, nach CAUCHY—KOWALEWSKI gesichert. Ausserdem sollen nun $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ nun noch so gewählt werden, dass die Lösung von (24) auch θ Null macht, und wir verlangen also dass θ jedenfalls schon für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ verschwindet:

$$(X_{12}\overset{0}{p})_0\,(X_{31}\overset{0}{q})_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Nehmen wir einen Augenblick an, es gelänge $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ den Bedingungen (27) und (28) entsprechend zu wählen, so würde für die aus $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ hervorgehende Lösung p, q der Ausdruck θ der Gleichung

$$X_1\,\theta - X_2\,(\sigma\,\theta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29a)$$

oder ausgeschrieben

$$\partial_1\,\theta = X_2\,(\sigma\,\theta) - \underset{1}{v^4}\,\partial_4\,\theta - \ldots - \underset{1}{v^n}\,\partial_n\,\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29b)$$

genügen, in welcher Gleichung σ jetzt, nach Bildung der Lösung p, q, eine bekannte Funktion von $x^1, \ldots, x^n$ wäre. Nun genügt aber θ infolge (28) jedenfalls der Gleichung

$$\theta\,(\overset{0}{x}{}^1, x^2, \ldots, x^n) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Da es nun aber einerseits nach CAUCHY—KOWALEWSKI nur eine einzige Lösung von (29*b*) gibt, die für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ Null wird, anderseits aber $\theta = 0$ offenbar eine solche Lösung ist, so ist diese Lösung auch die einzige und daraus geht hervor, dass die konstruierte Lösung p, q von (20*a*) auch (20*b*) befriedigt.

Es bleibt jetzt also nur noch zu zeigen, dass es tatsächlich Funktionensysteme $\overset{0}{p}, \overset{0}{q}$ von $x^2, \ldots, x^n$ gibt, die gleichzeitig (27) und (28) befriedigen und die Anzahl der möglichen unabhängigen Funktionensysteme zu bestimmen. Man wähle dazu für $\overset{0}{q}$ eine Funktion, die die Ausdrücke

$$(X_2\overset{0}{q})_0\ ;\ (X_{23}\overset{0}{q})_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

nicht beide zum verschwinden bringt und substituiere diese Funktion in (28). Es entsteht dann eine für $\overset{0}{p}$ lineare homogene partielle Differential-

gleichung erster Ordnung in $x^2, \ldots, x^n$. Diese Gleichung hat $n-2$ funktional unabhängige Lösungen, darunter die triviale $\overset{0}{p} = \overset{0}{q}$. Es gilt die anderen Lösungen $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}$, $(\mathfrak{x} = 1, \ldots, n-3)$, so zu wählen, dass für jede einzelne Lösung $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}$ gilt

$$(X_{23}\overset{0,\mathfrak{x}}{p})_0 (X_2 \overset{0}{q})_0 - (X_2 \overset{0,\mathfrak{x}}{p})_0 (X_{23} \overset{0}{q})_0 \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Bekanntlich lassen sich nun die $n-2$ Lösungen einer solchen Gleichung so wählen, dass im Punkte $x^\alpha = \overset{0}{x}{}^\alpha$, $(\alpha = 2, \ldots, n)$ die $n-2$ Vektoren $\partial_\alpha \overset{0}{q}, \partial_\alpha \overset{\mathfrak{x}}{p}$ mit $n-2$ linear unabhängigen Vektoren $\overset{0}{Q}_\alpha, \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ zusammenfallen, die nur den jetzt *algebraischen* aus (27) und (28) hervorgehenden Bedingungen

$$(\underset{2}{v^\mu}\, \partial_\mu \underset{3}{v^\alpha}) \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha \underset{2}{v^\beta} \overset{0}{Q}_\beta - \underset{2}{v^\alpha} \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha (\underset{2}{v^\mu}\, \partial_\mu \underset{3}{v^\beta}) \overset{0}{Q}_\beta \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\underset{2}{v^{[\alpha}}\, \underset{3}{v^{\beta]}} \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha \overset{0}{Q}_\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

zu genügen haben, im übrigen aber beliebig sind. Zwar liegt $\partial_\alpha \overset{0}{q}$ und damit $\overset{0}{Q}_\alpha$ schon fest, aber die Anfangswerte von $\partial_\alpha \overset{0,\mathfrak{x}}{p}$ sind noch diesen Bedingungen entsprechend wählbar. Im Punkte $x' = \overset{0}{x}{}'$ wählen wir nun die Koordinaten in der X_{n-1} von $x^2, \ldots, x^n$ vorübergehend so, dass $\underset{2}{v^\varkappa} = \underset{2}{e^\varkappa}$, $\underset{3}{v^\varkappa} = \underset{3}{e^\varkappa}$ und $2\, \underset{[2}{v^\varkappa}\, \partial_\mu \underset{3]}{v^\varkappa} = \underset{4}{e^\varkappa}$. Dann gehen die algebraischen Bedingungen für die $\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ über in

$$\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_4 \overset{0}{Q}_2 - \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_2 \overset{0}{Q}_4 \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_2 \overset{0}{Q}_3 - \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_3 \overset{0}{Q}_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

und diesen Bedingungen kann natürlich stets genügt werden, da Q_2 und Q_4 der Voraussetzung (31) nach nicht beide verschwinden.

Die Voraussetzung, die für die Wahl der Anfangswerte für $x^1 = \overset{0}{x}{}^1$ aufgestellt werden musste, ist also erfüllt und aus den Anfangswerten $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}, \overset{0}{q}$ entstehen somit $n-3$ Lösungssysteme $\overset{\mathfrak{x}}{p}, \overset{\mathfrak{x}}{q}$ der Gleichungen (20). Ein jedes solches Lösungssystem gibt einen Vektor

$$\overset{\mathfrak{x}}{w}_\lambda = \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\, \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda \quad ; \mathfrak{x} = 1, \ldots, n-3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und es ist μ zu bestimmen aus einer der drei Gleichungen

$$X_b \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\, X_b \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Die $n-3$ so erhaltenen Vektoren sind in einer Umgebung von $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$ linear unabhängig, denn für $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$ ist

$$'\overset{\mathfrak{x}}{w}_\alpha = \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\overset{0}{Q}_\alpha \;;\; \alpha = 2, \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ und $\overset{0}{Q}_\alpha$ folgt in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$

$$'\overset{1}{w}_{[\alpha_1} \ldots '\overset{n-3}{w}_{\alpha_{n-3}]} \neq 0 \;;\; \alpha = 2, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

also auch

$$'\overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots '\overset{n-3}{w}_{\lambda_{n-3}]} \neq 0 \;;\; \lambda = 1, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Das Gleichungssystem $\overset{x}{w}{}^\lambda\, dx_\lambda = 0$ ist also gleichwertig mit dem System von $n-3$ Gleichungen der Klasse 3

$$(\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\,\overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda)\, dx^\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

womit das Theorem für $q = n-3$ bewiesen ist. Die gefundene Form für $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}}$ enthält 3 $(n-3)$ beliebige Funktionen und diese Anzahl ist der höchsten Anzahl von unabhängigen Bedingungszahlen von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}}$ gleich, sodass wir eine Normalform gefunden haben.

Es ist für das weitere wichtig ganz genau zu diskutieren welche algebraische Bedingungen man einem Faktor $\lambda p_\lambda + \mu q_\lambda$ in einem Punkt $x' = \overset{0}{x}{}^\varkappa$ auferlegen muss und welche Freiheit man behält. Es seien P_λ, Q_λ zwei Vektoren im Punkte $x' = \overset{0}{x}{}'$, die dort den algebraischen Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & v^{\varkappa\lambda\mu}\, P_\lambda\, Q_\mu = 0 \qquad\qquad b) \quad v^{\varkappa\lambda\mu}\, P_{[\mu}\, Q_{\nu]} \neq 0 \\
c) & \left\{\begin{array}{c} \overset{1}{v}{}^\lambda\, P_\lambda = \sigma\, \overset{2}{v}{}^\lambda\, P_\lambda \\ \overset{1}{v}{}^\lambda\, Q_\lambda = \sigma\, \overset{2}{v}{}^\lambda\, Q_\lambda \end{array}\right. \\
d) & \sigma\, \overset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{2}{v}{}^{\lambda]}\, P_\varkappa\, Q_\lambda + (\overset{5}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{2}{v}{}^{\lambda]} + \overset{6}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{3}{v}{}^{\lambda]})\, P_\varkappa\, Q_\lambda = 0; \quad \overset{4}{v}{}^\varkappa = 2\, \overset{[2}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \overset{3]}{v}{}^\varkappa; \\
 & \qquad\qquad \overset{5}{v}{}^\varkappa = 2\, \overset{[3}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \overset{1]}{v}{}^\varkappa; \quad \overset{6}{v}{}^\varkappa = 2\, \overset{[1}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \overset{2]}{v}{}^\varkappa \\
e) & \overset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{2}{v}{}^{\lambda]}\, P_\varkappa\, Q_\lambda \neq 0
\end{array}\right\} . \quad (43)$$

genügen. Wir bemerken sogleich, dass sich die Gleichungen (43a, c, d) ersetzen lassen durch (43a) und

$$f) \qquad (\overset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{1}{v}{}^{\lambda]} + \overset{5}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{2}{v}{}^{\lambda]} + \overset{6}{v}{}^{[\varkappa}\, \overset{3}{v}{}^{\lambda]})\, P_\varkappa\, Q_\lambda = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

welche letztere Gleichung sich auch schreiben lässt

$$g) \qquad (\partial_\mu\, v^{\mu\lambda\varkappa})\, P_\lambda\, Q_\varkappa = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

sodass wir für P_λ und Q_λ schliesslich nur die Gleichungen (43*a*, *g*) und die Ungleichungen (43*b*, *e*) übrig behalten. Aus dem Umstande, dass $v^1_2 = v^1_3 = v^1_4 = 0$ ist, folgt, dass für P_α und Q_α, $\alpha = 2, \ldots, n$, die Bedingungen (33) und (34) gelten, und dass sich ein Lösungssystem p, q konstruieren lässt für welches $\partial_\alpha p = P_\alpha$ und $\partial_\alpha q = Q_\alpha$ für $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$. Es ist also nur noch zu zeigen, dass in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$ auch $p_1 = \partial_1 p = P_1$ und $q_1 = \partial_1 q = Q_1$ ist. Nun genügen $p_\lambda = \partial_\lambda p$ und $q_\lambda = \partial_\lambda q$ den Gleichungen

$$v^{\varkappa\lambda\mu}\, p_\lambda\, q_\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$(v^{[\varkappa}_4\, v^{\lambda]}_1 + v^{[\varkappa}_5\, v^{\lambda]}_2 + v^{[\varkappa}_6\, v^{\lambda]}_3)\, p_\varkappa\, q_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

P_λ und Q_λ aber den Gleichungen (43*a*) und (43*f*). Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die 1-Komponenten von $v^\varkappa_2$, $v^\varkappa_3$, $v^\varkappa_4$, $v^\varkappa_5$ und $v^\varkappa_6$ alle verschwinden, ergeben sich daraus folgende Gleichungen für $p - P_1$ und $q_1 - Q_1$ in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$

$$\left.\begin{aligned} (p_1 - P_1)\, v^\mu_2\, Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, v^\mu_2\, P_\mu &= 0 \\ (p_1 - P_1)\, v^\mu_3\, Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, v^\mu_3\, P_\mu &= 0 \\ (p_1 - P_1)\, v^\mu_4\, Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, v^\mu_4\, Q_\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und die Matrix dieses Systems hat infolge (43*e*) den Rang 2, sodass $p_1 = P_1$ und $q_1 = Q_1$. Wir fassen das Ergebniss folgendermassen zusammen und formulieren alles in Bezug auf beliebige Wahl der Koordinaten und der Faktoren:

Das Gleichungssystem

$$\left\| \begin{matrix} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \\ X_3 p & X_3 q \end{matrix} \right\| = 0 \quad \text{oder:} \quad \left.\begin{aligned} \lambda X_1 p + \mu X_1 q &= 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q &= 0 \\ \lambda X_3 p + \mu X_3 q &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} X_a &= v^\mu_a \partial_\mu \\ a &= 1, 2, 3 \end{aligned}\right\} . \quad (45)$$

in n Variablen besitzt mindestens ein System von $n-3$ Lösungssystemen p^ξ, q^ξ, ($\xi = 1, \ldots, n-3$), deren zugehörige Vektoren $\lambda^\xi p_\lambda + \mu^\xi q_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von zwei Vektoren P_λ, Q_λ in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &a) \quad v^{\varkappa\lambda\mu}\, P_\lambda\, Q_\mu = 0 \\ &b) \quad v^{\varkappa\lambda\mu}\, P_{[\mu}\, Q_{\nu]} \neq 0 \\ &c) \quad (\partial_\mu\, v^{\mu\lambda\varkappa})\, P_\lambda\, Q_\varkappa = 0 \\ &d) \quad \left\| \begin{matrix} v^\lambda_1 P_\lambda & \ldots & v^\lambda_6 P_\lambda \\ v^\lambda_1 Q_\lambda & \ldots & v^\lambda_6 Q_\lambda \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range 2;}\ X_4 = X_{23}, \text{ u.s.w.} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches $\partial_\lambda p = P_\lambda$, $\partial_\lambda q = Q_\lambda$ *in* $x' = \underset{0}{x'}$.

4. *Beweis für gerades p, wenn der Beweis für das vorhergehende ungerade p geliefert ist.*

Wir nehmen an das Theorem sei schon bewiesen für $p = 2u - 1$. Ist dann q_λ ein beliebiger Gradientvektor, der kein Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$, $q = n - 2u$, ist, so ist

$$w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_q} q_{\lambda]} \neq 0 \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

und dieser $(n - 2u + 1)$ Vektor lässt sich nach Voraussetzung zerlegen $(n - 2u + 1)$ Faktoren, darunter q_λ und $n - 2u$ Faktoren der Klasse $\leqq 2u - 1$

$$\overset{p+1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{n}{w}_{\lambda_q} q_{\lambda]} = \overset{1}{u}_{[\lambda_1} \ldots \overset{q}{u}_{\lambda_q} q_{\lambda]} \ldots \ldots \quad (48)$$

Daraus folgt, dass sich jeder der Vektoren u_λ linear in $\overset{x}{w}_\lambda$ und q_λ ausdrücken lässt und es ergeben sich also q lineare Kombinationen der $\overset{x}{w}_\lambda$, die sich als Summe von Vielfachen von q_λ und *einem* der u_λ schreiben lassen. Diese Kombinationen müssen linear unabhängig sein, da die u_λ und q_λ es sind und ihr Produkt ist also gleich $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ wenn man den freien skalaren Faktor in $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ richtig wählt. Da aber von den Vektoren u_λ bekannt ist, dass ihre Klasse $\leqq 2u - 1$ ist, so ist die Klasse der erhaltenen Faktoren von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ sicher $\leqq 2u + 1$ womit der Beweis geliefert ist, Die Faktoren haben die Form

$$'\overset{\mathfrak{x}}{w}_\lambda = \overset{\mathfrak{x}}{s}_\lambda + \overset{1,\mathfrak{x}}{f}\ \overset{1,\mathfrak{x}}{s}_\lambda + \ldots \overset{u,\mathfrak{x}}{f}\ s_\lambda ; \ \mathfrak{x} = 1, \ldots, n-2u \ldots \quad (49)$$

Es ist zu beachten, dass der letzte Gradientvektor rechts, s_λ, für alle Faktoren derselbe ist, und dass das System in dieser Darstellung demnach $2uq + 1 = pq + 1$ frei wählbare Funktionen enthält. Da die maximale Anzahl der unabhängigen Bestimmungszahlen eines bis auf einen Zahlenfaktor festgelegten q-Vektors bekanntlich pq beträgt, enthält die Darstellung also noch eine Funktion zu viel.

5. *Anfangsbedingungen für* $q = n - 4$.

Um für $q = n - 4$ die Bedingungen abzuleiten, die man einem Faktor der Klasse 5 in einem Punkt $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$ auferlegen darf, wählen wir in diesem Punkte einen kovarianten Vektor R_λ, dessen $(n-1)$-Richtung die 4-Richtung des Feldes nicht enthält, der aber übrigens beliebig ist. Die $(n-1)$-Richtung und die 4-Richtung haben dann eine 3-Richtung gemeinschaftlich und es ist also möglich die Richtung von $\underset{1}{v}'$ ausserhalb dieser 3-Richtung zu wählen. Sodann wählen wir das Koordinatensystem und die Grösse von $\underset{1}{v}'$ so, dass $\underset{1}{e}' = \underset{1}{v}'$ im ganzen betrachteten Gebiet und

dass $\overset{1}{e}_\lambda = R_\lambda$ in $x^\nu = \overset{0}{x}^\nu$. Es ist dann stets möglich $\overset{2}{v}^\nu$, $\overset{3}{v}^\nu$ und $\overset{4}{v}^\nu$ so zu wählen, dass

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 \\ X_2 &= \partial_2 + \overset{2}{v}^5 \partial_5 + \ldots + \overset{2}{v}^n \partial_n \\ X_3 &= \partial_3 + \overset{3}{v}^5 \partial_5 + \ldots + \overset{3}{v}^n \partial_n \\ X_4 &= \partial_4 + \overset{4}{v}^5 \partial_5 + \ldots + \overset{4}{v}^n \partial_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Für die Operatoren $X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$ schreiben wir der Reihe nach $X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$. Es seien jetzt P_λ und Q_λ zwei Vektoren in $x^\nu = \overset{0}{x}^\nu$, die den algebraischen Bedingungen

$$\overset{2}{v}^{[\nu} \overset{3}{v}^{\lambda} \overset{4}{v}^{\mu]} P_\lambda Q_\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\overset{2}{v}^{[\nu} \overset{3}{v}^{\lambda} \overset{4}{v}^{\mu]} P_{[\mu} Q_{\nu]} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$(\overset{8}{v}^{\nu} \overset{4}{v}^{\lambda} - \overset{9}{v}^{\nu} \overset{3}{v}^{\lambda} + \overset{10}{v}^{\nu} \overset{2}{v}^{\lambda}) P_{[\mu} Q_{\lambda]} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\left\| \begin{matrix} \overset{2}{v}^{\lambda} P_\lambda & \overset{2}{v}^{\lambda} Q_\lambda \\ \vdots & \vdots \\ \overset{4}{v}^{\lambda} P_\lambda & \overset{4}{v}^{\lambda} Q_\lambda \\ \overset{8}{v}^{\lambda} P_\lambda & \overset{8}{v}^{\lambda} Q_\lambda \\ \vdots & \vdots \\ \overset{10}{v}^{\lambda} P_\lambda & \overset{10}{v}^{\lambda} Q_\lambda \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range 2} \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

genügen. Sodann existiert nach dem früher bewiesenen ein System von Lösungen p, q der Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} X_2 p & X_2 q \\ X_3 p & X_3 q \\ X_4 p & X_4 q \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

für welches $p_\lambda = P_\lambda$ und $q_\lambda = Q_\lambda$ ist in $x^\nu = \overset{0}{x}^\nu$. Betrachten wir jetzt das Gleichungssystem

$$\left\| \begin{matrix} X_1 p & X_1 q & X_1 r \\ X_2 p & X_2 q & X_2 r \\ X_3 p & X_3 q & X_3 r \\ X_4 p & X_4 q & X_4 r \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

wo p und q schon die oben konstruierten Lösungen von (55) sind, so sieht man unmittelbar, dass $r = x^1$, also $r_\lambda = R_\lambda$ diese Gleichungen erfüllt. In der Tat enthalten X_2, X_3 und X_4 keine Differentiationen nach x^1 und die dreireihigen Determinanten verschwinden also alle vermöge (55). Nun war aber R_λ ein Vektor in $x^\varkappa = \underset{0}{x^\varkappa}$, der nur der Bedingung

$$\| \underset{1}{v^\lambda} R_\lambda \;\; \underset{2}{v^\lambda} R_\lambda \;\; \underset{3}{v^\lambda} R_\lambda \;\; \underset{4}{v^\lambda} R_\lambda \| = \text{Matrix vom Range 1} \quad . \; . \quad (57)$$

zu genügen hatte, im übrigen aber beliebig war. Die Wahl des Bezugssystems und der Faktoren ist jetzt so getroffen dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x^\varkappa}$

$$\underset{1}{v^\lambda} R_\lambda = 1, \; \underset{2}{v^\lambda} R_\lambda = 0, \; \ldots, \; \underset{4}{v^\lambda} R_\lambda = 0$$

ist. Die Bedingungen für P_λ, Q_λ und R_λ erscheinen hier in einer nicht symmetrischen Gestalt, die auf die spezielle Wahl des Bezugssystems und der Faktoren von $v^{\varkappa\lambda\mu\nu}$ zurückzuführen ist. Sie lassen sich aber unmittelbar in symmetrischer Form schreiben und für allgemein gewählte Koordinaten und Faktoren:

$$v^{\varkappa\lambda\mu\nu} P_\lambda Q_\mu R_\nu = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

$$v^{\varkappa\lambda\mu\nu} P_{[\mu} Q_\nu R_{\varrho]} \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

$$(\underset{1\;2\;34}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda} + \underset{2\;3\;14}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda} + \underset{3\;1\;24}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda} + \underset{1\;4\;23}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda} + \underset{2\;4\;31}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda} + \underset{3\;4\;12}{v^\varkappa v^\mu v^\lambda}) P_{[\varkappa} Q_\lambda R_{\mu]} = 0 \quad (60a)$$

oder einfacher

$$(\partial_\varkappa v^{\varkappa\mu\lambda\nu}) P_\mu Q_\lambda R_\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60b)$$

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{v^\lambda} P_\lambda & \underset{1}{v^\lambda} Q_\lambda & \underset{1}{v^\lambda} R_\lambda \\ \vdots & & \\ \underset{10}{v^\lambda} P_\lambda & \underset{10}{v^\lambda} Q_\lambda & \underset{10}{v^\lambda} R_\lambda \end{vmatrix} = \text{Matrix vom Range 3; } X_4 = X_{12}, \text{ u.s.w.} \quad (61)$$

In der Tat sind diese Bedingungen bei der speziellen Wahl des Bezugssystems und der Faktoren mit den Bedingungen (51—54) identisch, da bei allen Vektoren $v^\varkappa$ ausser $\underset{1}{v^\varkappa}$ die erste Bestimmungszahl Null ist und $R_\lambda = \underset{1}{e_\lambda}$ ist. Die jetzt erhaltene Form der Bedingungen ist aber von dieser speziellen Wahl unabhängig und zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen.

Das Gleichungsstem

$$\begin{vmatrix} X_1 p & X_1 q & X_1 r \\ X_2 p & X_2 q & X_2 r \\ X_3 p & X_3 q & X_3 r \\ X_4 p & X_4 q & X_4 r \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \lambda X_1 p + \mu X_1 q + \nu X_1 r = 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q + \nu X_2 r = 0 \\ \lambda X_3 p + \mu X_3 q + \nu X_3 r = 0 \\ \lambda X_4 p + \mu X_4 q + \nu X_3 r = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} X_b = \underset{b}{v^\mu} \partial_\mu \\ b = 1, 2, 3, 4 \end{array} \quad (62)$$

in n Variablen besitzt mindestens ein System von $n-4$ Lösungssystemen $\overset{\varkappa}{p}, \overset{\varkappa}{q}, \overset{\varkappa}{r}$, $(\varkappa = 1, \ldots, n-3)$, deren zugehörige Vektoren $\overset{\varkappa}{\lambda}\overset{\varkappa}{p_\lambda} + \overset{\varkappa}{\mu}\overset{\varkappa}{q_\lambda} + \overset{\varkappa}{\nu}\overset{\varkappa}{q_\lambda}$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von drei Vektoren $P_\lambda, Q_\lambda, R_\lambda$ in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen (58—61) genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches $\partial_\lambda p = P_\lambda, \partial_\lambda q = Q_\lambda, \partial_\lambda r = R_\lambda$ in $x^\varkappa = \overset{0}{x}{}^\varkappa$.

Chemistry. — *Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten.* (Siebente Mitteilung). Von ERNST COHEN und J. J. A. BLEKKINGH Jr.

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Der Einfluss der Dispersität kristallisierter Stoffe auf das elektrische Leitvermögen ihrer gesättigten Lösungen.

EINLEITUNG.

Bekanntlich hat man bisher aus der Tatsache, dass sich ein Unterschied zwischen dem elektrischen Leitvermögen der bei bestimmter Temperatur gesättigten Lösungen eines Stoffes feststellen liess, je nachdem dieselben mit grösseren, bezw. mit kleineren Kristallen dieser Substanz im Gleichgewicht waren, den Schluss gezogen, dass die Löslichkeit grosser, bezw. kleiner Kristalle derselben Substanz eine verschiedene ist. Selbst die neueste Literatur über diesen Gegenstand [1]) führt noch immer Versuche von G. A. HULETT an, auf Grund derer er beim Bariumsulfat auf Differenzen von 80 Prozent schloss.

Nachdem uns die Erscheinung bekannt geworden war, welche wir mit dem Namen *„Dispersitätseffekt"* belegt haben [2]), erschien es uns notwendig, das Problem aufs neue zur Hand zu nehmen und zwar unter Ausschluss der Möglichkeit, dass die zur Untersuchung gelangende, gesättigte Lösung infolge darin noch vorhandener unsichtbarer fester Teilchen ein elektrisches Leitvermögen aufweist, das teilweise auf die Gegenwart jener Teilchen zurückzuführen ist, welche zur Leitfähigkeit der gesättigten Lösung beizutragen im stande sind [3]).

Ausserdem war aber auch ganz besonders darauf zu achten, dass die zu untersuchenden Substanzen möglichst rein waren. Diesen beiden Anforderungen wurde bisher nicht genüge geleistet bei den Versuchen mit Bariumsulfat, welche, wie bereits oben betont, stets angeführt werden als überzeugende Beweise für die Existenz eines Unterschiedes zwischen der Löslichkeit von kleinen, bezw. grossen Kristallen desselben Stoffes.

A. DER BISHERIGE STAND DES PROBLEMS.

1. Zunächst sei hier der bisherige Stand des Problems kurz skizziert. Nachdem F. KOHLRAUSCH [4]) die Löslichkeit in Wasser s.g. unlöslicher

---

[1]) Vergl. z.B. J. H. HILDEBRAND, Solubility, Second Edition, New York 1939. S. 188.
[2]) Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **39**, 155 (1936), § 6ff.
[3]) J. J. BIKERMANN, Z. physik. Chem. (A) **163**, 378 (1933).
[4]) Z. physik. Chem. **12**, 234 (1893). Auch KOHLRAUSCH und HOLBORN, Das Leitvermögen der Elektrolyte, Leipzig 1916.

Salze durch Feststellung der Leitfähigkeit ihrer gesättigten Lösungen ermittelt hatte, wurde dieses Verfahren auch mehrfach angewendet zur Bestimmung der Differenz zwischen den Löslichkeiten des Bodenkörpers vor und nach dessen Zerreiben. So fand G. A. HULETT [1]) in dieser Weise, dass beim Gips Unterschiede bis 20 Prozent, beim Bariumsulfat selbst solche bis 80 Proz. eintraten. Beim Gips stellte sich später heraus [2]), dass derselbe beim Zerreiben teilweise dehydratiert wird ($CaSO_4 . 2H_2O \rightarrow CaSO_4$), und dass das Anhydrid c.p. eine grössere Löslichkeit besitzt als das Hydrat. Ein Teil der Zunahme des Leitvermögens der gesättigten Lösung war somit auf jenen Vorgang zurückzuführen.

Heute ist allgemein bekannt, dass Bariumsulfat sich ohne Weiteres nicht in völlig reinem Zustande darstellen lässt, da während und nach seiner Bildung aus Lösungen seine eigenen und auch fremde Ionen auf der Oberfläche adsorbiert, und auch in dem Niederschlag gefunden werden [3]).

Obwohl F. KOHLRAUSCH [4]) bereits die Möglichkeit betont hatte, dass das starke Ansteigen der Leitfähigkeit der Bariumsulfatlösungen, welches nach dem Zerreiben der Kristalle eintritt, einer in denselben vorhandenen Verunreinigung zuzuschreiben ist, wurde erst später von HULETT und L. H. DUSCHAK [5]) mittels eines besonders eleganten Verfahrens der Nachweis erbracht, dass dem tatsächlich so ist, und dass, falls das Sulfat mittels einer $BaCl_2$-Lösung dargestellt wird, mehr als 1 Prozent dieses Stoffes in den Kristallen des gebildeten $BaSO_4$ vorhanden ist [6]). Dessen ungeachtet hat HULETT, soweit uns bekannt, seine Löslichkeitsversuche am $BaSO_4$ niemals wiederholt. Er hatte gefunden, dass beim Zusetzen eines zerriebenen $BaSO_4$-Präparats zu einer gesättigten Lösung des nicht zerriebenen, das Leitvermögen der Lösung bis zu einem Maximalwert zunimmt, und sodann innerhalb weniger Minuten zunächst langsam, später aber äusserst langsam abnimmt, um dann nach 1 bis 2 Tagen einen konstanten Wert zu erreichen, der indes um ein Geringes höher ist, als der des Leitvermögens der „normal" gesättigten Lösung. HULETT schloss daraus zu Unrecht, dass, falls diese Zunahme von einer Verunreinigung verursacht wäre, das elektrische Leitvermögen nicht abnehmen könne, und dass die

---

[1]) Z. physik. Chem. **37**, 385 (1901); **47**, 357 (1904).

[2]) M. L. DUNDON und E. MACK Jr., J. Am. Chem. Soc. **45**, 2479 (1923).

[3]) Vergl. auch D. BALAREW und Mitarbeiter, Z. anal. Chem. **72**, 303 (1927); Kolloid Chem. Beihefte **30**, 249 (1930); Z. Krist. (A) **89**, 268 (1934); Kolloid Z. **67**, 203 (1934). Z. KARAOGLANOV, Z. physik. Chem. (A) **178**, 143 (1937); BOŽO TEŽAK, Literatur über $BaSO_4$-Niederschläge, Z. physik. Chem. (B) **32**, 52 (1936); L. DE BROUCKÈRE, J. chim. phys. **25**, 605 (1928); **26**, 250 (1929); **27**, 548 (1930); I. M. KOLTHOFF und Mitarbeiter, Chem. Weekbl. **29**, 346 (1932); **31**, 102, 230, 244, 395, 526, 550, 598 (1934); **33**, 321 (1936); J. Am. Chem. Soc. **56**, 1658 (1934). **57**, 2577 (1935); **59**, 1237, 1639 (1937); **60**, 508 (1938).

[4]) Z. physik. Chem. **44**, 197 (1903), Fussnote S. 227—228.

[5]) Z. anorg. Chem. **40**, 196 (1904).

[6]) Vergl. auch KARAOGLANOV und B. SAGORTSCHEV, Z. anorg. allgem. Chem. **198**, 352 (1931).

beobachtete Abnahme somit als eine Folge der Rekristallisation kleinerer Kristalle zu grösseren anzusprechen sei.

Nun wurde aber von D. BALAREW [1]) nachgewiesen, dass auch nach Zusatz von einigen Tropfen einer verdünnten Bariumchloridlösung zu einer gesättigten Lösung des Sulfats das elektrische Leitvermögen der letzteren plötzlich ansteigt, um sodann langsam abzunehmen. Er war somit der Erste, welcher die HULETTsche Erklärung, dass ausschliesslich die Zerteilung des verriebenen Bariumsulfats hier eine Rolle spielt, widerlegte.

2. Das beobachtete Verhalten lässt sich auch beim chemisch reinen Bariumsulfat völlig erklären, und zwar auf Grund folgender Ueberlegung: Bei den Untersuchungen von H. R. KRUYT und seinen Mitarbeitern [2]) stellte sich heraus, dass ein Salzkristall im allgemeinen nur dann mit einer Lösung, in welcher sich eine gleiche Anzahl der beiden vorhandenen Ionen befinden, im Gleichgewicht ist, falls an der Oberfläche dieses Kristalls eines der Ionen (meist das negative, oder ein anderes negatives, welches in dasselbe Gitter passt,) im Ueberschuss vorhanden ist. Die aequivalente Menge der anderen Ionen (meist beliebige positive Ionen, die s.g. Gegenionen) befindet sich im Ueberschuss in der Doppelschicht. A. J. RUTGERS und J. TH. G. OVERBEEK [3]) haben darauf hingewiesen, dass diese Ionen der Doppelschicht zu dem Gesamtleitvermögen beitragen, alsob dieselben sich in freiem Zustande in der Lösung befänden. Es ist somit, alsob wir schnell einen Ueberschuss von Ba-Ionen in die Lösung bringen, wenn wir plötzlich die Gesamtoberfläche des Bodenkörpers vergrössern. Dies erreichen wir, falls wir einer gesättigten Bariumsulfatlösung eine gewisse Menge von feinzerriebenem, chemisch reinem (trocknem) Bariumsulfat zusetzen. Da auch jetzt das Löslichkeitsprodukt des Sulfats überschritten wird, wird ein geringer Betrag des Salzes auskristallisieren. Während dieses Vorganges, welcher sehr langsam verläuft, besonders aber in dem Falle, wenn nicht gerührt wird, fällt das elektrische Leitvermögen, da die Gesamtzahl der Ionen abnimmt. Dennoch bleibt diese Gesamtzahl, und folglich auch das Leitvermögen, grösser, als in der ursprünglichen, normal gesättigten, Lösung, es sei dann, dass die Oberfläche des Bodenkörpers auf die Dauer eine geringere wird infolge des Verwachsens der Kristalle. Bei *Suspensionen* wird der konstante Endwert des Leitvermögens der gesättigten Lösung stets höher sein, als der von richtig filtrierten gesättigten *Lösungen*.

3. D. BALAREW [4]) hatte bereits die Aufmerksamkeit auf die Tatsache

---

[1]) Z. anorg. allgem. Chem. **145**, 122 (1925).

[2]) Vergl. u. A. E. J. W. VERWEY und H. R. KRUYT, Z. physik. Chem. (A) **167**, 137, 149, 312 (1933).

[3]) Z. physik. Chem. (A) **177**, 29 (1936).

[4]) Z. anorg. allgem. Chem. **145**, 122 (1925); **151**, 68 (1926); **154**, 170 (1926); **163**, 213 (1927).

gelenkt, dass bei einem zerriebenen Bodenkörper neue Bruchflächen der Einwirkung des Lösungsmittels ausgesetzt werden, statt der natürlichen Kristallflächen bei nicht zerriebenen Präparaten. Er glaubt hierdurch das von HULETT beobachtete Verhalten erklären zu können. Auf Grund einiger Versuche, welche mit einem nicht reinen Bariumsulfat angestellt wurden, kommt er zu dem Schluss, dass „man weder durch Zerreiben einer Kristallsubstanz noch durch Niederschlagen von feinen kolloidalen Teilchen die grössere Löslichkeit der kleinen Teilchen experimentell mit Sicherheit bestätigen kann". Ferner weist er darauf hin, dass die Teilchen, welche einen Durchmesser von 0.1 μ besitzen, und welche nach HULETT und nach der Formel von WI. OSTWALD–FREUNDLICH [1]) in Lösung gehen müssten, nach längerer Zeit (Jahren) noch in der Suspension vorhanden waren.

4. Das nämliche hatte bereits M. L. DUNDON [2]) festgestellt: "It has been observed that fine particles may have their solubility diminished by an electrical charge or adsorption effect on the surface".

Diese Erklärung wird gestützt von den theoretischen Ausführungen von W. C. MC. LEWIS [3]) und von denen von L. F. KNAPP [4]).

B. DAS VERSUCHSVERFAHREN.

5. Das Leitvermögen unserer Lösungen ermittelten wir nach dem bekannten Verfahren von F. KOHLRAUSCH mit Wechselstrom und Telephon, unter Zuschaltung eines Kondensators. Für Einzelheiten verweisen wir auf die Doctordissertation von J. J. A. BLEKKINGH Jr. (Utrecht 1938), welche wir hier fernerhin mit den Buchstaben D.B. bezeichnen werden. Der geeichte Brückendraht war durch Zusatz von zwei Manganindrahtrollen auf 10 m gebracht [5]). Sämtliche Widerstände waren geeicht. Die Temperatur (25.00° C.) liess sich mittels eines grösseren Regulators (Inhalt 500 cc), welcher mit Tetrachloraethan gefüllt war, innerhalb 0.005° C. konstant halten. Das verwendete Beckmannsche Thermometer (in 0.01° C. geteilt) war mit einem in 0.1° C. geteilten, von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Charlottenburg-Berlin geeichten Normalthermometer verglichen worden.

---

[1]) H. FREUNDLICH, Kapillarchemie, Leipzig 1930, S. 218.

[2]) J. Am. Chem. Soc. **45**, 2569 (1923).

[3]) Kolloid Z. **5**, 91 (1909).

[4]) Trans. Faraday Soc. **17**, 457 (1921/22).

[5]) Bei der Bestimmung des sehr geringen Leitvermögens des verwendeten Wassers und der gesättigten Bariumsulfatlösungen verlängerten wir den Brückendraht (Platin) nur an einer Seite, um in dieser Weise den Stand des Schleifkontaktes, bei welchem das Tonminimum eintrat, auf dem Platindraht halten zu können. In diesem Falle beträgt die Länge des Messdrahtes 5.5 m; die Genauigkeit der Messung ist dann noch eine sehr genügende. Das Tonminimum liess sich bis auf 0.1 bis 0.2 mm scharf ermitteln.

6. Unsere Widerstandsgefässe (Fig. 1), welche wir mit den Nummern 1, bezw. 2 bezeichnen, waren aus s.g. FISCHERglas hergestellt. Nach gründlicher Reinigung kochten wir sie während etwa 20 Std. mit destilliertem Wasser aus. No. 1 verwendeten wir ausschliesslich zur Bestimmung des Leitvermögens der Bariumsulfatlösungen, bezw. der Suspensionen dieses Salzes, während No. 2 ausschliesslich dazu diente das Leitvermögen des verwendeten Wassers in jedem Falle aufs neue festzustellen. An das Gefäss, welches etwa 35 cc fasste, waren zwei Glasrohre *E* angeschmolzen, die an ihrem unteren Ende Platinbleche von je 1 cm^2 trugen. In die Röhrchen *E* gaben wir Quecksilber, und tauchten in dieses die Drähte, welche zur Brückenkombination führten. Die Entfernung zwischen den Platinblechen betrug etwa 8 mm. Dieselben waren einander parallel, und befanden sich ungefähr in der Mitte von *B*. Die Widerstandskapazität dieser Gefässe blieb während der Untersuchung, welche mehr als ein Jahr in Anspruch nahm, völlig unverändert, auch nach der Behandlung mit konzentrierter Schwefelsäure bei 100° C., welche erforderlich war um die letzten Spuren von $BaSO_4$ von der inneren Glaswand zu entfernen. Wir platinierten die Elektroden schwach mittels einer frisch dargestellten Lösung, welche 3 Prozent Platinchlorwasserstoffsäure, sowie 0.025 Prozent Bleiazetat (nach LUMMER und KURLBAUM) enthielt. Nach kathodischer Polarisation in verdünnter Schwefelsäure dauerte es noch mehrere Tage, bevor die Kapazität wieder konstant wurde, ungeachtet des häufigen Spülens mit heissem, bezw. kaltem Wasser. Die Kapazität stellten wir fest mittelst Chlorkaliumlösungen, welche 0.01 bezw. 0.02 n. waren. Dieselbe ergab sich zu: 0.3940 cm^{-1} (Gefäss No. 1), und 0.3691 cm^{-1} (Gefäss No. 2).

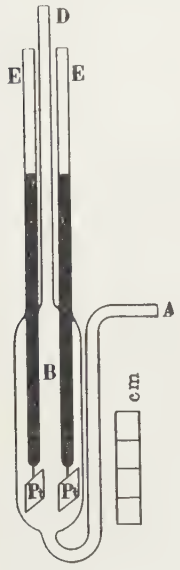


Fig. 1.

Bei den Messungen füllten wir das Widerstandsgefäss fast völlig mit der zu untersuchenden Flüssigkeit. Geringe Höhendifferenzen im Stande derselben (bis etwa 1 cm von oben) übten keinen Einfluss auf den gemessenen Widerstand.

An die Rohre *A* und *D* schlossen wir längere, gereinigte Gummischläuche an, welche auf der andern Seite geschlossen waren. Durch abwechselndes Zusammendrücken und Freigeben derselben liess sich der Inhalt des Widerstandsgefässes in Bewegung setzen.

Der Widerstand in derartigen geschlossenen Apparaten blieb während mehrerer Tage konstant; selbst nach zwei Monaten hatte das Leitvermögen unseres doppelt destillierten Wassers nur eine Zunahme von 15 Prozent erlitten.

7. Die Gefässe standen in dem Thermostaten stets in einem Stativ

unter Wasser. Nachdem wir die zu untersuchende gesättigte Lösung in ausgedämpften, dickwandigen Fläschchen im Schüttelapparat (Vergl. D.B. Seite 60 ff.) hergestellt hatten, pressten wir dieselbe (ohne zu filtrieren) mittels eines Gummiballons in das Widerstandsgefäss. Bei den Versuchen, in denen nicht geschüttelt war, saugten wir die Lösung mittels einer Wasserluftpumpe ohne Weiteres in das Gefäss. In derselben Art und Weise entfernten wir die Lösung und spülten das Gefäss mit doppelt destilliertem Wasser aus. Nach dem Füllen verschlossen wir das Gefäss sofort, und schritten zur Messung.

Die Genauigkeit derselben betrug 0.01×10^{-6} mho/cm; ihre Reproduzierbarkeit geht indes nur bis etwa 0.1×10^{-6} mho/cm, da die geringste Verunreinigung (CO_2, NH_3 aus der Atmosphäre) infolge des äusserst geringen Leitvermögens des Wassers und der Bariumsulfatlösungen, einen sehr grossen Einfluss übt.

C. DIE VERWENDETEN STOFFE.

1. *Das Wasser.*

8. Während wir betreffs Einzelheiten auf D.B. Seite 85—88 hinweisen, bemerken wir hier nur kurz Folgendes: Nach vielen Vorversuchen gelang es uns ein für unsere Zwecke vorzüglich brauchbares Wasser darzustellen, dessen Leitvermögen gering, und während längerer Zeit konstant war. Wir erhielten es durch Destillation grösserer Mengen aus einem kupfernen Kessel und darauf folgender Destillation unter Verwendung eines silbernen Kühlers. Das erste so erhaltene Liter wurde nicht verwendet. Nachdem das Destillat während einiger Zeit ruhig gestanden hatte, (in einem Kolben aus Jenaer Glas) war seine Leitfähigkeit (abhängig von der Temperatur, bei welcher es gestanden hatte, d.h. von der Tatsache, ob es viel bezw. wenig Gase enthielt) 1.20 bis 1.70×10^{-6} mho/cm. An einem heissen Sommertage erreichten wir Werte bis 0.80×10^{-6} mho/cm. Das Leitvermögen blieb sehr konstant. Es wurde bei jedem Versuch mittels des Gefässes No. 2 festgestellt und bei der betreffenden Sulfatlösung in Rechnung gezogen.

2. *Das Bariumsulfat.*

9. Nach vielen vergeblichen Versuchen ein chemisch reines $BaSO_4$ darzustellen (Vergl. D.B. Seite 88—89 und 92—93), schlugen wir folgenden Weg ein, der zum Ziel führte: Wir stellten uns zunächst aus $BaCl \cdot 2H_2O$ pro analysi) und reiner, konzentrierter Schwefelsäure Lösungen her, welche genau 2 n. waren. Meistens tropften wir die Chloridlösung bei Zimmertemperatur unter stetem Rühren zu der verdünnten Schwefelsäure. Sowohl in diesem Falle, wie bei Verwendung von heissen Lösungen (90° C.), ist der gebildete Niederschlag stark verunreinigt.

Durch häufiges Dekantieren (20 Mal) pro Tag mit kaltem, bezw. warmem Wasser, oder längerem Kochen mit Wasser lässt sich die Reinigung des Niederschlages nicht erzielen. Dass derselbe stets Chlorid enthielt, falls er mittels $BaCl_2$ dargestellt wurde, wiesen wir nach dem HULETT–DUSCHAKschen Verfahren nach. Zu diesem Zwecke lösten wir das Sulfat in konzentrierter, heisser Schwefelsäure und leiteten durch diese Lösung in dem in Fig. 2 abgebildeten Apparat, der in einem Wasserbade auf 100° C. gehalten wurde, während zwei Std. Luft. Bei *A* schlossen wir eine Waschflasche mit titrierter Silbernitratlösung an, und hinter derselben eine zweite zur Kontrolle. Nachdem das gebildete HCl aus *B* in die Silberlösung getrieben war, titrierten wir letztere nach VOLHARD. So fanden wir, dass unser $BaSO_4$ etwa 0.25 Proz. Bariumchlorid enthielt.

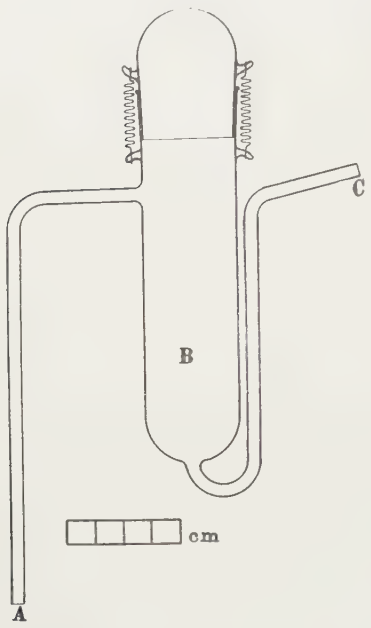


Fig. 2.

10. Zwecks weiterer Reinigung des Sulfats verfuhren wir nunmehr folgendermassen: Wir entfernten die chlorfreie Lösung des Sulfats in Schwefelsäure aus *B* und tropften unter stetem Rühren Wasser in diese Lösung (dieses Wasser war zu Leitfähigkeitsbestimmungen hergestellt worden). Nachdem sich der Niederschlag zu Boden gesetzt hatte, dekantierten wir die darüberstehende Flüssigkeit täglich während 1 bis 2 Wochen. Sodann trockneten wir den Niederschlag, glühten ihn im Platintiegel zunächst vorsichtig, wobei deutlich Schwefelsäurenebel entwichen, pulverten denselben mehrmals und glühten ihn im Plantintiegel im elektrischen Ofen während etwa 5 Std. bei zirka 800° C. Eine zu hohe Temperatur ist dabei zu vermeiden, weil das Sulfat dann merklich zu dissoziieren anfängt. Die grösseren Stücke des Sulfats, welche in dieser Weise erhalten wurden, behandelten wir mehrere Male mit „Leitfähigkeitswasser", welches durch Dekantieren entfernt wurde. Sie wurden unter derartigem Wasser aufbewahrt. Dass $BaCl_2$ in dem Niederschlage nunmehr nicht vorhanden war, stellten wir nach dem HULETT–DUSCHAKschen Verfahren fest.

11. Das beste Kriterium für die chemische und physikalische Reinheit des verwendeten Bariumsulfats ist das elektrische Leitvermögen der gesättigten Lösung desselben, welcher man überschüssigen Bodenkörper zugesetzt hat. Ist dieses Leitvermögen gering, und ändert es sich nicht mit der Zeit, so darf man auf die Reinheit des Präparates schliessen. Bei unseren sehr zahlreichen Versuchen haben wir dementsprechend das

elektrische Leitvermögen der gesättigten Lösung (mit Bodenkörper) als Mass für die Reinheit des Sulfats benutzt. Bei den ersten Messungen betrug es für die gesättigten Lösungen eines Präparats, welches mehrere Male gewaschen war, etwa 10.0×10^{-6} mho/cm, und stieg bei ruhigem Stehen der Lösung im Laufe eines Tages auf 20.0×10^{-6} mho/cm. Von dieser Grössenordnung war auch das Leitvermögen in den Versuchen von M. L. DUNDON [1]) und in denen anderer Forscher auf diesem Gebiet [2]). Es bleibt sehr merkwürdig, dass die Schlussfolgerungen, welche man aus Versuchen an derartigen Präparaten gezogen hat, ohne weiteres in die Literatur und in die Lehrbücher übernommen wurden. Das Leitvermögen der bei 25.00° C. gesättigten Lösung des von uns verwendeten, reinen Bariumsulfats betrug 4.0 bis 4.5×10^{-6} mho/cm und war selbst nach zwei Monaten unverändert geblieben. Bringt man die Leitfähigkeit des verwendeten Wassers in Rechnung, so fällt jener Wert auf 3.0×10^{-6} mho/cm.

12. Die Dimensionen der Teilchen des Bodenkörpers der untersuchten gesättigten Lösungen ermittelten wir mehrmals auf mikroskopischem Wege. Wir stellten den Durchschnitt der kleinsten Teilchen bei 70-maliger Vergrösserung (oder mehr) fest und nahmen den Mittelwert einer grösseren Anzahl Messungen als Kriterium. Die Okularskala hatten wir zuvor mit einem in 0.01 mm geteilten Objektmikrometer von CARL ZEISS kontrolliert. Es stellte sich heraus, dass die Kristalle, welche sich beim sehr langsamen Eintropfen einer 0.01 n. Bariumhydroxydlösung und einer gleichkonzentrierten Schwefelsäurelösung in destilliertes Wasser gebildet hatten, aus ziemlich grossen, durchsichtigen Blöckchen bestanden, deren Durchschnitt etwa 5 bis 10 μ betrug.

Beim Diffundieren (während sechs Wochen) einer 0.01 n. Schwefelsäure durch Pergamentpapier in eine aequivalente Menge einer 0.01 n. Bariumhydroxydlösung erhielten wir Kristalle von 250 μ und darüber.

Beim Schütteln grösserer Konglomerate des Bariumsulfats, welche sich beim Glühen des Materials gebildet hatten (Vergl. § 10), bröckelten von diesen stets grössere, bezw. kleinere Teilchen ab, so dass sich ein heterodisperses Gemisch bildete. Einzelne Teilchen waren dann noch 50 μ, aber es stellte sich heraus, dass die grösseren Teilchen aus vielen kleineren aufgebaut waren, welche an einander hafteten.

---

[1]) J. Am. Chem. Soc. **45**, 2662 (1923).

[2]) Ueber die physikalische Reinheit unserer Präparate ist folgendes zu bemerken: Bekanntlich (Vergl. ERNST COHEN und J. W. A. VAN HENGEL, Z. physik. Chem. (A) **161**, 179 (1932) bildet sich beim Niederschlagen eines Stoffes sehr häufig zunächst die metastabile Form desselben; der gebildete Niederschlag kann während sehr langer Zeit die beiden Formen nebeneinander enthalten. Nun besitzt nach W. GRAHMAN, Z. anorg. Chem. **81**, 257 (1913) Bariumsulfat einen Umwandlungspunkt bei 1150° C. Wir haben nun untersucht, ob unsere Präparate Gemische mehrerer Modifikationen darstellten. Die dilatometrische Untersuchung ergab ein negatives Resultat. (Vergl. D.B. Seite 89). Vergl. jedoch auch A. L. TH. MOESVELD, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **40**, 155 (1937); Auch Z. physik. Chem. (A) **178**, 455 (1937).

Nachdem die betreffende Flüssigkeit während 4 Std. ruhig gestanden hatte, waren die meisten der darin noch schwebenden Teilchen bereits kleiner als 1 μ. In vielen Fällen dauerte es 10 bis 20 Std. bevor die Flüssigkeit völlig klar war. Aus der Tatsache, dass eine so lange Zeit zur Klärung erforderlich war, lässt sich schliessen, dass jedenfalls Teilchen vorhanden waren, deren Dimension weniger als 1 μ betrug.

13. In den Versuchen mit diesem Material, welche wir in unserer nächsten Mitteilung zu beschreiben beabsichtigen, handelt es sich demnach um Teilchen, welche nach der Gleichung von Wi. Ostwald–Freundlich eine messbar grössere Löslichkeit aufweisen müssten, und dementsprechend müssten auch deren gesättigten Lösungen ein messbar grösseres Leitvermögen besitzen.

van 't Hoff-*Laboratorium.*

Utrecht, Dez. 1939.

Physics. — *Cathode sputtering in a magnetic field.* By F. M. PENNING and J. H. A. MOUBIS. (Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken. Eindhoven, Holland.) (Communicated by Prof. G. HOLST.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

§ 1. *Sputtering coefficient and sputtering efficiency according to earlier experiments.*

The elementary process in the sputtering of a metal surface is the liberation of one or more metal atoms [1]) by the collision of one ion against the surface. For this process a probability ϑ may be introduced, which we shall call the sputtering coefficient, giving the mean number of atoms liberated per ion from the surface and not again diffusing back to it. ϑ proves to be a function of the nature and the energy V_p of the ion, the nature and surface condition of the target metal, the gas density p_0 (gas pressure reduced to 0° C) and the geometrical form of the apparatus used. When the target metal is an infinite plate at a distance d of another infinite plate (collector), the two latter variables may be combined into one, viz. the product $p_0 d$. In this case the sputtering shows analogy to the evaporation of atoms from a plate through a gas atmosphere to another plate [2]); the fraction f_1 of the evaporated atoms reaching the collector plate being, under certain approximations [3]):

$$f_1 = \frac{2{,}3\,\lambda_1}{p_0 d + 2{,}3\,\lambda_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(λ_1 = mean free path of the evaporated atoms in a gas of 1 mm pressure). A similar value of f_1 should be expected in the case of sputtering; calling ϑ_0 the total number of metal atoms liberated by one ion, inclusive those returning back again, then:

$$\vartheta = f_1\,\vartheta_0.$$

---

[1]) From oxidized metal surfaces also ions may be liberated (comp. § 5). The electrochemical sputtering, where the gas ions react with the metal is left out of account here; comp. A. GÜNTHERSCHULZE, Z. Phys. **36**, 563 (1926).

[2]) A. GÜNTHERSCHULZE, Z. Phys. **38**, 575 (1926) (sputtering of a large number of metals in a hydrogen glow discharge).

[3]) W. DE GROOT, Physica **8**, 23 (1928); H. POSE, Z. Phys. **52**, 428 (1928); H. BARTELS, Z. Phys. **55**, 507 (1929). The coefficient 2,3 holds for the case that the evaporating atoms have the same mean energy and the same mass as the gasatoms, the persistence being taken into account (without persistence the coefficient for the three-dimensional case is $^4/_3$).

The experiments in the literature from which ϑ may be derived consist of two groups, one with $\lambda_1 \rangle\rangle p_0 d$ and $f_1 = 1$, giving directly values for ϑ_0, the other with $\lambda_1 \langle\langle p_0 d$, giving only values for ϑ, whilst ϑ_0 has to be calculated with Eqs. (1) and (2) where, however, the value of λ_1 is very uncertain (comp. § 4).

For the experiments of this first group up to now a discharge tube with at least 3 electrodes was necessary, the ions being formed in an auxiliary discharge (usually with a heated filament as cathode) and being accelerated to a target electrode serving at the same time as collector; the energy V_p of the impinging ions (in volts) here is equal to the potential difference between the place of origin and the target electrode.

Most experiments on cathode sputtering belong to the second group, where the target electrode is also the cathode of a glow discharge. In the case of parallel plates, considered here, the collector often at the same time serves as anode for the glow discharge. In this kind of experiments the distance d is at least of the same order of magnitude as the thickness of the Crookes dark space d_c; as usually $\lambda_1 \langle\langle p_0 d_c$ this involves $\lambda_1 \langle\langle p_0 d$. Here the ions arrive at the cathode with an energy V_p which is smaller than the cathode fall V_c for two reasons: firstly, part of the ions are formed within the Crookes dark space and so pass only a fraction of the cathode fall V_c, secondly the ions lose energy in the Crookes dark space in collisions with gas atoms. Both effects we take into account [4]) by introducing a factor f_2 (< 1). Calling $\vartheta_c(V_c)$ the number of atoms liberated from the cathode and not returning to it for a cathode fall V_c, we have in connection with the preceding Eqs.:

$$\vartheta_c(V_c) = f_2\,\vartheta(V_c) = f_1\,f_2\,\vartheta_0(V_c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

For the determination of ϑ the pos. ion current i_p to the target electrode should be known. Taking into account that one ion liberates γ electrons from the cathode, the actually measured current i is given by:

$$i = i_p(1 + \gamma),$$

As γ usually is not known, the quantity directly resulting from the experiment is $\vartheta/(1 + \gamma)$ or $\vartheta_c/(1 + \gamma)$.

In Fig. 1 a few results for $\vartheta(500)/(1 + \gamma)$ obtained according to both methods are summarised. The dependence on $p_0 d$ at low pressures should be considered as only approximately right as the collector was not a plate parallel to the cathode. The values for tungsten given by the Research

[4]) At the values of $V_c \geq 500$ V the percentage of the ions formed within the Crookes dark space is usually small (comp. a forthcoming article of M. J. DRUYVESTEYN and F. M. PENNING in the Rev. Mod. Phys.). Moreover in the factor f_2 the number of atoms liberated by fast gas atoms originated from charge transfer has to be included. For low values of p_0 and high values of V_c, due to these circumstances the factor f_2 will be not much lower than 1.

Staff G.E.C. [5]) are only relative ones as the velocity of the ions is not known exactly. They were reduced to absolute values by equalling the

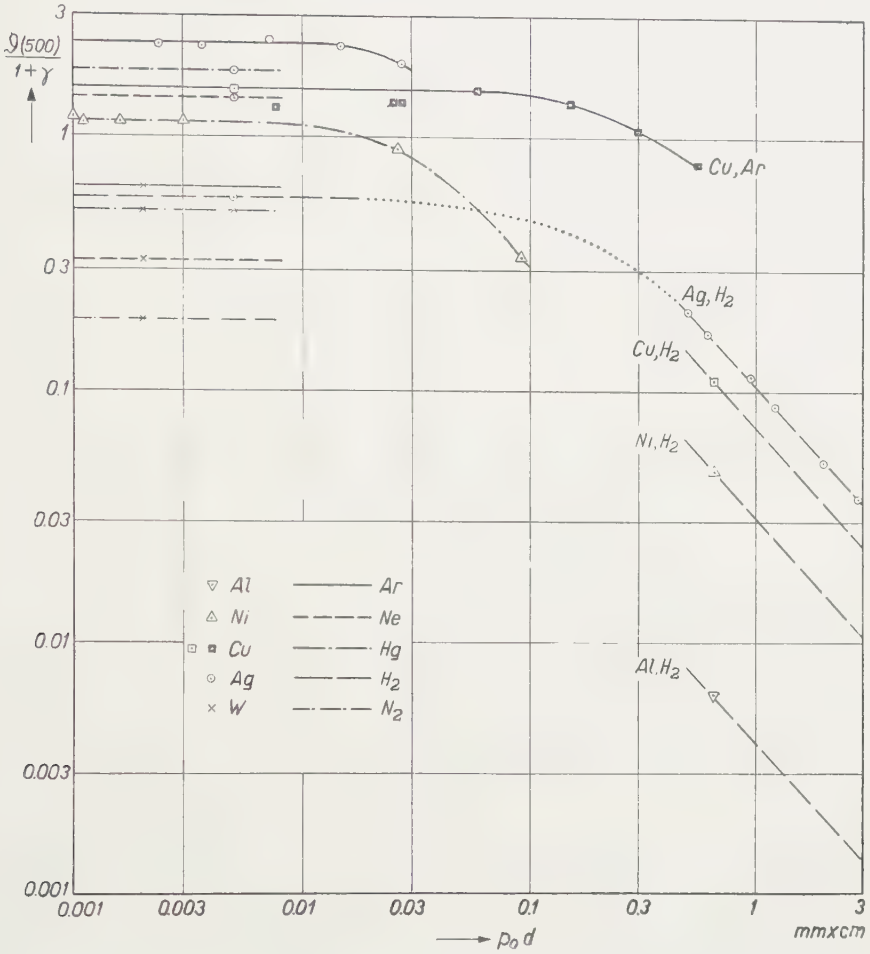


Fig. 1. Values of $\vartheta(500)$, the number of atoms liberated from and not returning to the cathode, according to different authors, reduced to 500 V. Solid points: some of the results obtained in the present article.

result for Hg^+ to that given by MEYER and GÜNTHERSCHULZE. The other points are due to GÜNTHERSCHULZE c.s. [2, 6, 7]) with exception of the solid squares which give some of the results obtained in the present article (cylindrical electrode arrangement). The measurements, made at higher voltages than 500 V, were reduced to 500 V with a reduction factor derived

---

[5]) Research Staff G.E.C. Phil. Mag. **45**, 98 (1923) (first method; *W* in H_2, He, N_2, Ne, Hg, Ar).

[6]) A. GÜNTHERSCHULZE and K. MEYER, Z. Phys. **62**, 607 (1930) (first method; Ag in He, H_2, Ne, N_2, Ar; Cu in Ar).

[7]) K. MEYER and A. GÜNTHERSCHULZE, Z. Phys. **71**, 279 (1931) (first method; 16 metals in Hg vapour).

from GÜNTHERSCHULZE's results. The values for Cu, Ni and Al at $p_0 d \geqq 0.5$ were calculated in the supposition that here $d = d_c$.

At low values of $p_0 d$ the independence of ϑ from $p_0 d$ shows that $\vartheta = \vartheta_0$; at the high values of $p_0 d$ (second method) f_2 probably [4]) may be taken ~ 1, so that the actually measured quantity ϑ_c is not much lower than ϑ.

Roughly spoken ϑ_0 is, for $V_p > 500$ V, proportional to V_p, so that for the sputtering of one atom an energy of $V_p/\vartheta_0\,(V_p)$ (volts) is required. The minimum energy necessary for the liberation of one atom is the evaporation energy W. So we may define a sputtering efficiency ε as:

$$\varepsilon = \frac{W}{V_p/\vartheta_0\,(V_p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

According to GÜNTHERSCHULZE c.s. [6, 7]) this efficiency is only of the order of a percent.

As to the dependence of ϑ_0 on the nature of the ion and the sputtered metal up to now no adequate theory has been given which covers the whole field, although several attempts in this direction have been made and for a small number of ions and atoms an agreement could be stated [8]).

§ 2. *Cathode sputtering in a magnetic field.*

As was remarked already in § 1 the sputtering in a glow discharge could not be performed at such low pressures that $\lambda_1 \rangle\rangle p_0 d$ and therefore ϑ_0 could be obtained from these experiments only by a rather strong extrapolation. Moreover, as the current density at constant cathode fall is proportional to p_0^2, it is so small at low gas pressures that the sputtering times become very long.

These inconveniencies may be eliminated by the application of a properly designed magnetic field which increases the lengths of the electron paths and consequently the amount of ionisation. As was discussed elsewhere [9]) this influence is particularly large when the cathode is a cylinder with end plates perpendicular to the axis in a coaxial magnetic field. In this arrangement the current density may be one or more orders of magnitude larger than without magnetic field, so that the sputtering time is reduced very considerably. This is important for the technical coating of surfaces with metal and, as a matter of fact, the experiments of which some results are given below, were undertaken for this purpose.

Apart from this advantage, the sputtering in a magnetic field may be performed in the pressure region where $\lambda_1 \rangle\rangle p_0 d$, giving direct results for the sputtering coefficient ϑ_0 and so bridging the gap between the two

---

[8]) A. VON HIPPEL, Ann. d. Phys. **80**, 672 (1926); **81**, 1043 (1926); here also the older literature; E. BLECHSCHMIDT, Ann. d. Phys. **81**, 999 (1926); E. BLECHSCHMIDT and A. VON HIPPEL, Ann. d. Phys. **86**, 1006 (1928); G. HOLST, Physica **4**, 68 (1924); R. SEELIGER and K. SOMMERMEYER, Z. Phys. **93**, 692 (1935); K. SOMMERMEYER, Ann. d. Phys. **25**, 481 (1936).

[9]) F. M. PENNING, Physica **3**, 873 (1936).

groups of experiments, mentioned in § 1 (solid squares Fig. 1). Therefore in the course of the experiments mentioned also a few measurements were made to determine the coefficient ϑ_0. Although the accuracy of the quantitative results is not very great and might be improved by a better design of the apparatus, we believe that this new method is worth to be described and that the preliminary results obtained give a welcome complement to those obtained with quite different experimental arrangements.

Another advantage of this method is that the three variables, current density (j), voltage (V) and gas density (p_0) may be changed independently of each other by the use of the magnetic field, whilst in the ordinary glow discharge one of them is determined by the two others.

§ 3. *Experimental arrangement.*

One of the tubes used is shown in Fig. 2. It consists of 2 parts, the fixed part II with a ground glass edge, and a part I with a ground flange which could be taken off for a new filling. Between the two grindings a rubber ring was inserted; the atmospheric pressure proved to be large enough to ensure a vacuum of 10^{-5} mm at the running pump.

The cathode C is a water cooled hollow copper cylinder with two flat end plates, soldered to a chrome iron one, which in its turn is sealed to a cylindrical glass tube. The metal-glass joint is protected from the discharge by mica foil and a silica tube. For the water cooling a hollow brass tube is screwed into the chrome iron part of the cathode.

For the sputtering of Ni and Ag the copper tube was electrolitically covered with one of these metals; the sputtering of Al was performed with a hollow Al-cylinder as a cathode.

The amount of sputtered material was determined by weighing small mica plates M before and after the experiment. The holder for these mica plates can be moved magnetically, with the aid of the iron piece F, within a hollow brass case B; through a window of this case successively all the plates M in the holder are exposed to the sputtering. By special measurements it was stated that the amount of sputtering did not change much along the length of the cathode cylinder.

The tube was placed within a coil, giving a magnetic field H parallel to the cathode cylinder.

The experiments were made in flowing argon, the arrangement being shown schematically in Fig. 3.

Immediately after the sputtering tube another gas discharge tube in a magnetic field ("magnetic manometer") was provided for the permanent survey of the gas pressure [10]) and the spectroscopic controll of the gas purity. The value of the argon pressure was measured on a Mc LEOD further on in the tube to the pump. According to the resistance of the

---

[10]) F. M. PENNING, Physica **4**, 71 (1937).

tubings this presure had to be multiplied with a certain factor in order to obtain the pressure of the flowing gas in the sputtering tube. Experimentally this factor was determined to about 1.7.

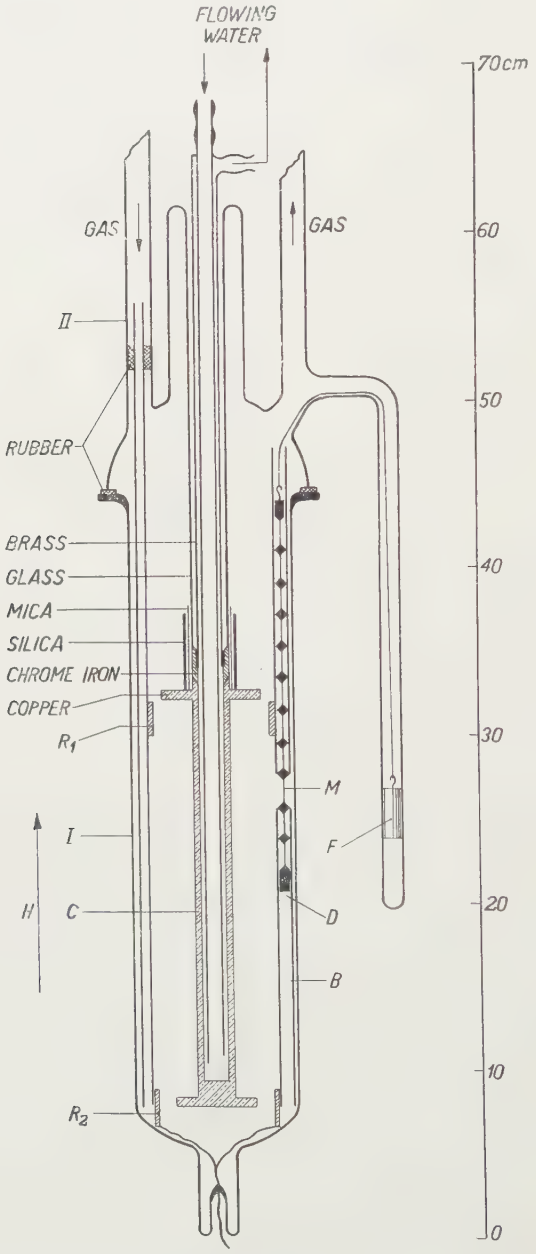


Fig. 2. Discharge tube for the sputtering of Cu.

§ 4. *Results for Cu.*

In Fig. 4 a few current voltage characteristics are given, showing the large influence of the magnetic field H. For $H = 0$ the current below

2000 V anode voltage was zero. With magnetic field the energy required to cover the mica with a layer of 0.001 mm was about 5 kilowattmin, which

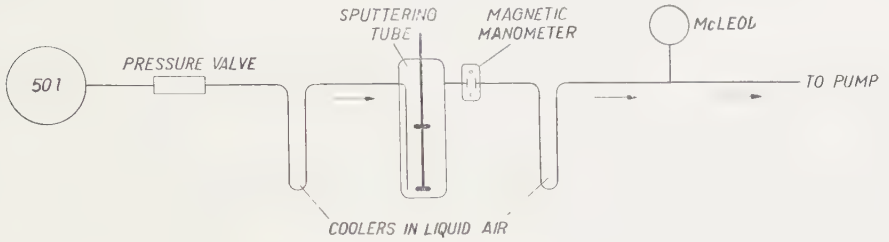


Fig. 3. Schematic survey of the experimental arrangement.

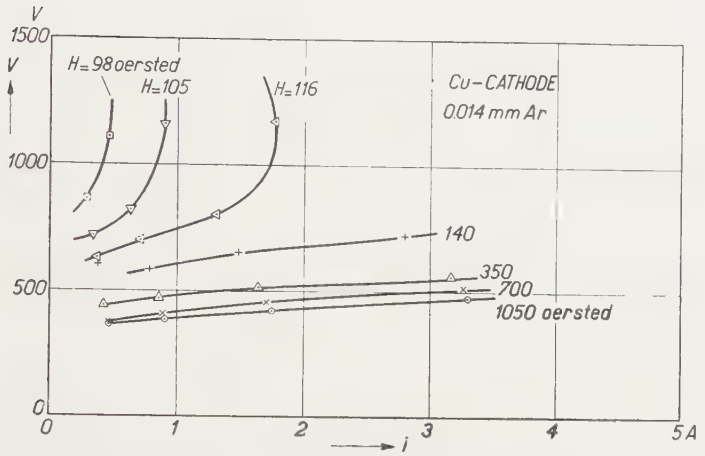


Fig. 4. Characteristics of the discharge in 0.014 mm Ar with Cu-cathode. Parameter: magnetic field strength H.

gives e.g. a time of only $3\frac{1}{2}$ min. at 500 V, 3 A. This time is very short as compared with that in the usual sputtering arrangements. With the tube mentioned in the end of § 4 it could be reduced to $\frac{1}{2}$ min.

The value of $\vartheta/(1+\gamma)$ was determined as a function of i, V and p (see the end of § 2), changing one of these quantities and holding constant the other two by a proper value of the magnetic field. The following series were measured:

500 V	;	1.65 A	;	p variable
1.7 A	;	0.022 mm Ar	;	V variable
0.022 mm Ar	;	500 V	;	i variable

The results for $\vartheta/(1+\gamma)$ as $f(p)$ are given in Fig. 5; the two series measured showing the same behaviour but a constant difference in the value of ϑ, perhaps due to a somewhat different distance from the cathode to the mica plate. Without magnetic field, with a current of 0.4 A (0.35 mm Ar), a value for $\vartheta/(1+\gamma)$ of only 0.15 could be obtained.

In Fig. 6, which gives $\vartheta/(1+\gamma)$ as $f(V_c)$ also the points have been

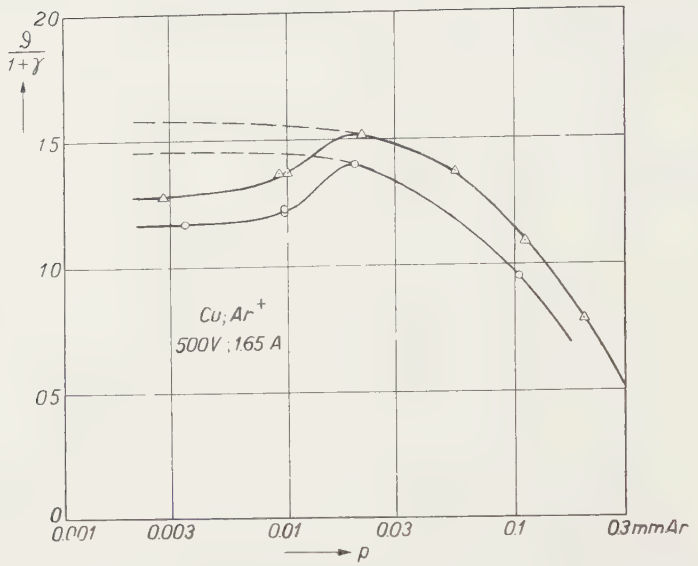


Fig. 5. Values of $\vartheta/(1+\gamma)$ as a function of the pressure for Cu and Ar+. ϑ is the number of Cu-atoms reaching the collector per Ar+-ion reaching the cathode, γ is the number of electrons liberated from the cathode per pos. ion.

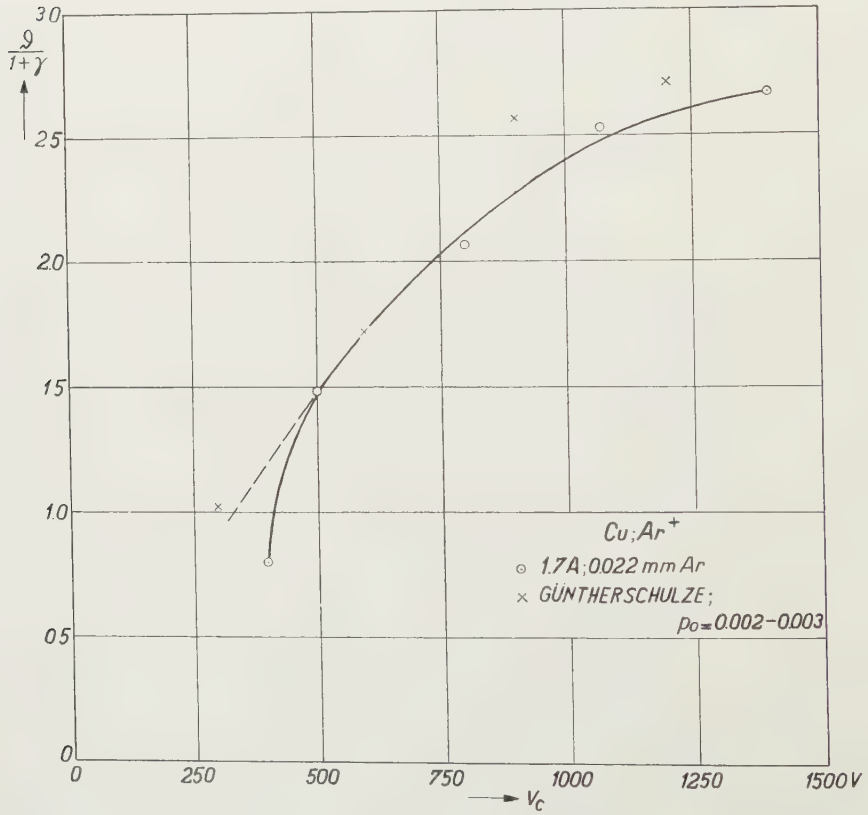


Fig. 6. Values of $\vartheta/(1+\gamma)$ as a function of the voltage V_c between cathode and anode.

plotted obtained by GÜNTHERSCHULZE and MEYER [6]) at much lower gas densities [11]) and a cathode temperature of 800° K. (first method of § 1). The agreement is good, the more so as our point for 400 V, should be discarded (see below). Fig. 7 shows the dependence of $\vartheta/(1+\gamma)$ on i.

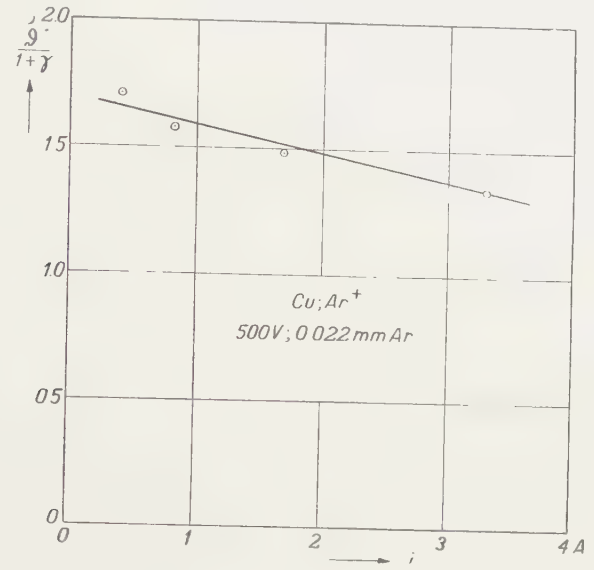


Fig. 7. Values of $\vartheta/(1+\gamma)$ as a function of the discharge current i.

In order to enable a rough survey of the experimental conditions in table I a few quantities, important for the discharge are given:

λ_e = mean free path of the electrons [12]) with energy $\frac{1}{2} V_c$.

λ_p = mean free path of the ions [13]) with energy $\frac{1}{2} V_c$.

λ = mean free path of the Ar-atoms [14]) at the pressure p.

d_c = thickness of the Crookes dark space, calculated after the space charge formel of LANGMUIR [15]) $d_c^2 = 5.462 \cdot 10^{-8} M^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}/j$ (M = atomic weight of the ion, V = potential difference in volts, j current density in A/cm^2).

$r = 3.37 \sqrt{V}/H$, radius of the circle described by an electron of energy V in the magnetic field H.

$l = 11.38 E/H^2$, maximum distance of the cathode, reached by an electron starting from the cathode with zero velocity in an homogeneous electric field [16]) of strength $E = V_c/d_c$.

---

[11]) In order to reduce the amount in gram/ampère as given by G. and M. to ϑ it has to be multipled with $26.8/M$ (M = atomic weight of the sputtered metal).

[12]) P. LENARD, Ann. d. Phys. **12**, 715 (1903).

[13]) F. WOLF, Ann. d. Phys. **29**, 33 (1937); A. ROSTAGNI, Nuovo Cim. **15**, 117 (1938).

[14]) LANDOLT–BÖRNSTEIN, Physikalisch-Chemische Tabellen I (1923), p. 119.

[15]) I. LANGMUIR, Rev. Mod. Phys. **3**, 191 (1931).

[16]) F. M. PENNING, Ned. T. Natuurk. **3**, 141 (1936).

TABLE I.

Mean values of several quantities in the experiments of Figs. 5—7 (Cu and Ar +)

p (mm)	V (volt)	i (ampère)	H (oersted)	$\frac{\vartheta}{1+\gamma}$	$\frac{\vartheta(500)}{1+\gamma}$	γ	$\vartheta(500)$	λ_e (cm)	λ_p (cm)	λ (cm)	d_c (cm)	r (cm)	l (cm)
0.003	500	1.65	850	1.23	1.23	0.10	1.35	31	2.6	1.6	0.098	0.089	0.081
0.01			430	1.30	1.30		1.43	9.3	0.77	0.48		0.17	0.31
0.03			204	1.43	1.43		1.57	3.1	0.26	0.16		0.35	1.4
0.10			127	1.06	1.06		1.16	0.93	0.077	0.048		0.59	3.6
0.30			83	0.37	0.37		0.41	0.31	0.026	0.016		0.91	8.2
0.022	400	1.65	1050	0.90	1.12	0.06	1.19	3.6	0.34	0.22	0.083	0.064	0.050
	500		251	1.48	1.48	0.10	1.65	4.2	0.35		0.098	0.30	0.92
	750		128	2.02	1.35	0.18	1.60	6.0	0.38		0.13	0.72	3.9
	1000		115	2.39	1.19	0.27	1.52	6.8	0.39		0.16	0.93	5.2
	1250		114	2.62	1.05	0.36	1.43	7.9	0.40		0.20	1.0	5.6
	1400		114	2.74	0.98	0.41	1.38	8.5	0.41		0.21	1.1	5.7
0.022	500	0.5	147	1.64	1.64	0.10	1.80	4.2	0.35	0.22	0.17	0.51	1.5
		1	178	1.59	1.59		1.74				0.12	0.42	1.4
		2	297	1.48	1.48		1.62				0.087	0.25	0.74
		3.5	675	1.32	1.32		1.46				0.067	0.11	0.19

γ = number of electrons liberated by one Ar^+ ion of energy V_c from a Cu cathode after GÜNTHERSCHULZE, BÄR and WINTER [17]).

$\vartheta/(1+\gamma)$, according to Figs. 5—7.

ϑ, calculated with the value for γ given in the table.

$\vartheta\,(500)$ = value of ϑ for a voltage of 500 V, assuming that

$$\vartheta\,(500) = 500\,\vartheta\,(V_c)/V_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

The values of r and l are given in order to compare roughly the path of an electron starting from the cathode with the thickness d_c of the Crookes dark space. The maximum distance from the cathode, reached by an electron, will lie between $r + d_c$ and $2r + d_c$ for $r \rangle\rangle d_c$ or $3\sqrt{V} \rangle\rangle Hd_c$ and will be approximately equal to l for $3\sqrt{V} \langle\langle Hd_c$ (see Fig. 8). For $3\sqrt{V} \sim Hd_c$ it will have an intermediate value.

The table shows that generally $r > d_c$ and $\lambda_e > d_c$ so that only few ions will be formed within the Crookes dark space. Only at very low pressures r and l are $\sim d_c$. Here however, r and l are also $\langle\langle \lambda_e$ so that most of the electrons liberated from the cylindrical part of the cathode will

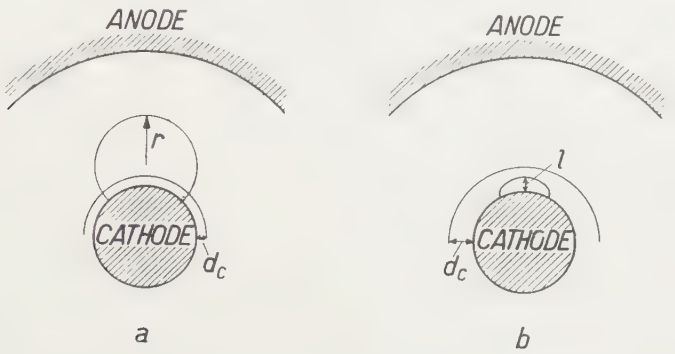


Fig. 8. Path of an electron liberated from the cathode for $3\sqrt{V} \rangle\rangle Hd_c$ (case *a*) and $3\sqrt{V} < Hd_c$ (case *b*). $H\perp$ plane of drawing.

return to it without having performed any collision. In these circumstances it is possible that the electrons are liberated mainly from the end plates of the cathode [9]) so that the discharge has an abnormal character. We suppose that the decrease of ϑ at the lowest pressures is due to this effect and that the real course of the curves in Fig. 5 should be approximately as given by the dotted lines.

According to the table usually d_c is $< \lambda_p$ and $\langle\langle \lambda_e$ so that the factor f_2 of § 1 is equal to 1. Only at the highest pressures used it possibly has to be taken into account ($p = 0.3$ mm).

---

[17]) A. GÜNTHERSCHULZE, W. BÄR and A. WINTER, Z. Phys. **111**, 208 (1938). These authors give γ as a linear function of V, γ becoming zero at a certain value u_0 of usually several hundred volts. As it is known that in the rare gases γ is still different from zero at $V = 0$, the values of GÜNTHERSCHULZE c.s. should not be used below the voltage region in which they were determined (500—3000 V.).

As to the dependence of ϑ on V the table shows that ϑ, after correction for the value of γ, is roughly proportional to V, so that the value of ϑ (500) calculated after Eq. (4) and corrected for the value of γ is approximately constant (see Fig. 9). The point for 400 V in Fig. 6 is

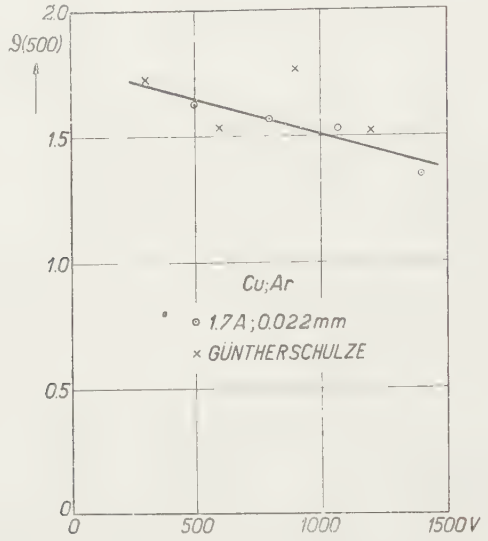


Fig. 9. Values of ϑ (500) being the value of ϑ reduced to 500 V after Eq. (4) and corrected for γ.

abnormally low, but as here also r and l are $< d_c$ this point was rejected for the reason given higher up. We do not know if the systematic small decrease of ϑ (500) with V in Fig. 9 which nevertheless remains, is real or is possibly due to the accepted value [18]) of γ.

The reason for the decrease of ϑ with increasing i in Fig. 7 is unknown. One could suppose that it was due to the ionisation of sputtered Cu-atoms which should return as ions to the cathode; the strong Cu-spectrum emitted by the discharge points in the same direction. This hypothesis, however, was not confirmed by the experiments with still larger current densities (see below).

It is remarkable that $\vartheta/(1+\gamma)$ has decreased with increasing p with a factor $\frac{1}{2}$ only at $p = 0.2$, corresponding to $pd = 0.5$. When the Cu-atoms were liberated from the cathode with room temperature velocity, however, the value of λ_1 (mean free path for 1 mm pressure) would be 0.005, and according to Eq. (1) the decrease of ϑ with a factor $\frac{1}{2}$ should occur already at $p_0 d = 0.011$ which makes a difference of a factor 45! A similar deviation from the expected value, although quantitatively much less, was observed by GÜNTHERSCHULZE for Ag with Ar^+ and for Ni with Hg^+ and is also

[18]) The value of γ is known to be very sensible to variations of the cathode surface, see A. GÜNTHERSCHULZE and H. BETZ, Z. Phys. **108**, 780 (1938); F. M. PENNING, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **33**, 841 (1930).

shown by Fig. 1 when the results for Ag in H_2 at high values of $p_0 d$ are compared with those at low values of $p_0 d$. For the explanation the following circumstances have to be taken into account:

1. probably the velocity of the Cu-atoms starting from the cathode is much larger than corresponds to room temperature [19]);
2. the mass of the Cu-atoms is larger than that of the Ar-atoms so that its velocity $\perp$ cathode cannot be reduced to zero by one collision;
3. the temperature of the gas is, due to the large energy used, much higher than room temperature [20]) ($p_0 < p$);
4. in the cylindrical arrangement used here the number of returning atoms is smaller than in the case of parallel plates, considered in deriving Eq. (1).

The influence of 3 was confirmed by later measurements with a smaller cathode, where four times larger current densities could be applied. In this case the decrease of ϑ with increasing values of pd was still smaller. Combining the results from the measurements with both tubes we obtain as a mean value of $\vartheta_0(500)/(1+\gamma)$:

$$\vartheta_0(500)/(1+\gamma) = 1{,}7$$

and, correcting for the value of γ and applying Eq. (4):

$500 < V_p < 1400\ V$ $\qquad \vartheta_0(V_p) = 0{,}0037\ V_p$ $\qquad$ Cu and Ar^+

The accuracy of this result we estimate as $\pm$ 25 %. As has been remarked already the agreement with the results of GÜNTHERSCHULZE and MEYER [6]) is very good.

§ 5. *Results for Al.*

In the literature one often finds the statement that the sputtering rate of aluminium is very small, BLECHSCHMIDT [8]) e.g. gives a value for Ar^+-ions which is only $^1/_{20}\times$ that of copper. It has also been stated [8]) that this low value is due to a surface layer on the metal, in the first place of Al_2O_3. To study this phenomenon more quantitatively the following experiment was made. An Al-bar of 1 cm diameter in the axis of a glass tube was exposed intermittently to a heavy glow discharge in an axial magnetic field (40 mA; 900 V; 0.06 mm Ar). In the cylindrical discharge tube another glass tube of a somewhat smaller diameter could be moved in order to expose successively fresh parts of the glasswall to the sputtering. The results for 4 consecutive sputterings are shown in Fig. 10. Obviously an energy of 7600 wattsec is needed to free the cathode from the not sputtering surface layer (I); in the second and third experiment (II and

---

[19]) F. BAUM, Z. Phys. **40**, 686 (1937) finds a velocity of the sputtered atoms corresponding to the melting point of the metal used.

[20]) In a glow discharge with watercooled electrodes already temperature increases of 150°, were found (H. FISCHER, Z. Phys. **113**, 360 (1939)).

III) the sputtering sets in immediately. One night's standing (between III and IV) in humid air restores again the initial state of the surface [21].

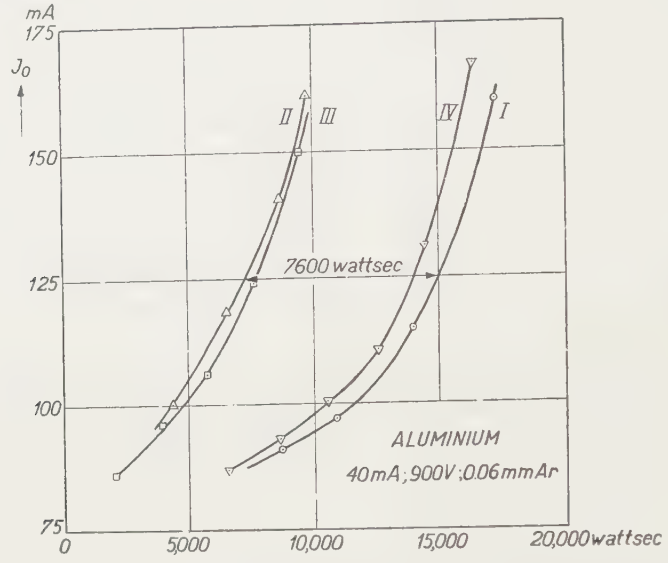


Fig. 10. Consecutive sputterings of an aluminium bar; sequence I, II, III, IV. I was the first sputtering after the pumping and filling of the apparatus, between III and IV the tube was opened and exposed to humid air of 1 atm. The thickness of the sputtered layer on the glass wall is given by the current I_0 through a glowlamp behind the tube, for which the glowing filament was just no longer visible.

The reason is probably the same as for the similar behaviour of MgO : according to GÜNTHERSCHULZE and BETZ [22] in MgO the Mg^+ ions are sputtered which are drawn back to the cathode by the electric field.

The discharge with an oxide layer on the aluminium cathode is, apart from the small amount of sputtering, also characterised by a lower discharge voltage at the same magnetic field, due to the much larger value of γ for the oxide [23]. Moreover, the disappearance of the oxide layer manifests itself by a rather sudden change in the colour of the discharge due to the appearance of the strong resonance lines of Al (3944, 3962 Å).

Similar optical and electrical phenomena, although much less pronounced, were also found in the experiments with Cu, described in the preceding §§. Also with Cu the first sputtering after a new filling of the tube usually gave too low values for ϑ with, at the same time, deviating values of the cathode fall. Contrary to Al, however, the cathode fall was higher for the

[21] Similar phenomena were already found by L. L. CAMPBELL, Phil. Mag. (6), **28**, 347 (1914).

[22] A. GÜNTHERSCHULZE and H. BETZ, Z. Phys. **106**, 365 (1937).

[23] For Mg GÜNTHERSCHULZE and BETZ l.c. found a decrease in λ from 1.88 to 0.37, when the oxide layer was removed. Compare the "spray discharge" phenomenon described by A. GÜNTHERSCHULZE and H. FRICKE, Z. Phys. **86**, 451 and 821 (1933).

unclean than for the clean Cu-surface. In the clean state, the colour of the discharge was of a deep green; especially at high pressures the Cu-lines were the strongest of the spectrum.

The values of ϑ for Al could be determined with an apparatus as that of Fig. 2 but with a hollow Al-cylinder instead of the copper one. The curves for ϑ (500) (corrected for the γ) are given in Figs. 11 and 12.

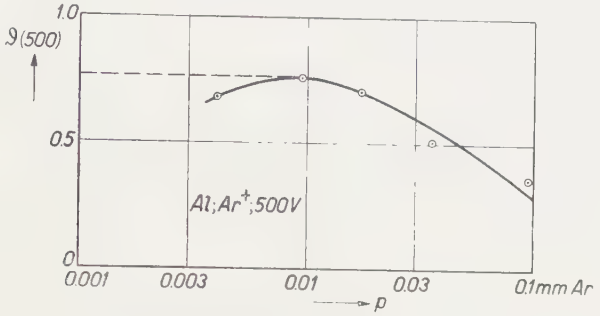


Fig. 11. Values of ϑ (500) for Al and Ar+.

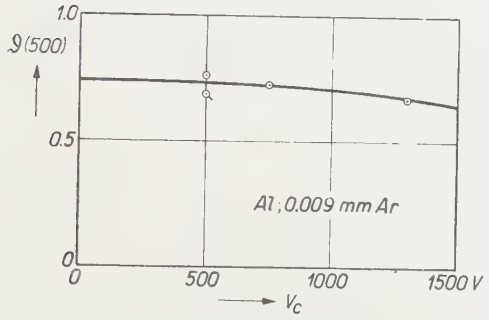


Fig. 12. Values of ϑ (500) for Al and Ar+.

The dependence on i was not determined. Here also ϑ is approximately proportional to V. The decrease of ϑ with increasing pressure is stronger than for Cu, which may be due to the smaller mass of the Al-atoms. The most probable value of ϑ_0 following from these measurements is:

$$500 < V < 1400 \qquad \vartheta_0 (V_p) = 0{,}0015\ V_p \qquad \text{Al and } Ar^+$$

which is about half the value obtained for Cu.

§ 6. *Experiments with Ni and Ag.*

For these metals no special measurements of ϑ were made. Only a rough value could be obtained from earlier experiments in Ar and H_2, where a number of holders with mica plates were placed behind rings as R_1 and R_2 in Fig. 2. As here always the first sputtering after a new filling must be used, the metal was not as clean as in the measurements of the preceding §§, the more so as the sputtering did not occur in flowing gas.

§ 7. *Survey of the results obtained.*

In table II the results for ϑ_0 are summarized, together with the values of the evaporation heat W [24]) and the efficiency ε, calculated after Eq. (3). For Cu and Ag also the values according to GÜNTHERSCHULZE and MEYER are given (cathode temperature about 800° K.); for Ag and Ar the difference is rather large, in the other 2 cases the agreement is very good.

TABLE II.

Summary of the results for ϑ_0 (500)

Metal	Gas	$\frac{\vartheta_0\ (500)}{1+\gamma}$	$\vartheta_0\ (500)$	Estimated accuracy	W (volts)	ε	$\frac{\vartheta_0\ (500)}{1+\gamma}$ G. and M.
Al	Ar	0.75	0.83	± 25 %	2.92	0.5 %	
Cu	Ar	1.7	1.9	± 25 %	3.51	1.3 %	1.5
Ni	Ar	1.2	1.35	± 50 %	4.25	1.1 %	
Ag	Ar	1.4	1.5	± 50 %	2.99	0.9 %	2.7
Ni	H_2	0.14	0.15	± 50 %	4.25	0.01 %	
Ag	H_2	0.47	0.56	± 50 %	2.99	0.03 %	0.58

The conclusion of GÜNTHERSCHULZE and MEYER that the sputtering efficiency is only of the order of 1 % and lower, is confirmed.

---

[24]) LANDOLT–BÖRNSTEIN, 3ter Erg. Bd. III (1936), p. 2709. According to some authors the efficiency should be calculated by taking for W not the evaporation heat, but adding to it the melting heat and the energy required to heat the metal to the boiling point. This, however, makes not more difference in ε than a factor 1.3 at maximum for the metals considered here.

Physics. — *Recherches sur quelques phénomènes d'interférence des courbes de vibration* (suite). Par J. W. N. LE HEUX. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN).

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

1. Dans un travail antérieur, nous avons dit, qu'aucune des figures de la table IV, qui représente les diverses images de la formule

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi$$
$$y = a \cos (\alpha + \theta) \cos (\varphi + \triangle)$$

ne peut donner l'image des lemniscates d'un cristal biaxial. Cependant, il y a deux figures, $2D$ et $4D$, qui présentent quelque ressemblance avec l'image précitée. En étudiant les particularités de ces figures, nous allons établir les conditions nécessaires et suffisantes pour chacune des deux spirales elliptiques, dont la superposition donne exactement l'image des lemniscates avec toutes ses variations. Quelques résultats des expériences à l'aide d'un appareil à quatre pendules sont réunis dans les tables VIII et IX.

2. Dans la numération de la table IV, les chiffres se rapportent à la différence de phase θ et les lettres à la différence de phase $\triangle$. Donc, les figures $2D$ et $4D$ ont une même différence de phase $\triangle$, près de 90°, mais la valeur de θ est pour $2D$ près de 0° et pour $4D$ près de 90°. Autrement dit: figurons-nous une ellipse aplatie E_2, qui diffère très peu de deux droites parallèles et une ellipse E_4, qui diffère très peu d'un cercle. La figure $2D$ peut être regardée comme l'ensemble des ellipses, presque cercles, inscrites dans les rectangles sur les doubles coordonnées des points de l'ellipse E_2 et la figure $4D$ comme l'ensemble des ellipses, presque cercles, inscrites dans les rectangles sur les doubles coordonnées des points de l'ellipse E_4. Il est évident, que la première bissectrice de l'angle des coordonnées est un axe de symétrie, donc les côtés des rectangles de la partie supérieure de l'ellipse E sont perpendiculaires aux côtés correspondants de la partie inférieure.

3. Observons ces rectangles avec plus de précision.
Nous distinguons dans la demie-ellipse $EGHKL$ (table VII, fig. A):

1. dans l'intervalle EG: un petit carré sur EL comme diagonale, des rectangles horizontaux, une droite horizontale GN.
2. dans l'intervalle GH: une droite horizontale GN, des rectangles horizontaux, un grand carré sur HP comme diagonale.

3. dans l'intervalle HK: un grand carré sur HP, des rectangles verticaux, une droite verticale KR.
4. dans l'intervalle KL: une droite verticale KR, des rectangles verticaux, un petit carré sur LE comme diagonale.

Après l'inscription des ellipses $\triangle$, réunies par une courbe continue, nous avons (pour $\triangle = 90°$):

1. Une spirale elliptique horizontale S_1, commençant par un petit cercle (rayon $\frac{1}{2}EL = a \sin \frac{1}{2}\theta$) et terminant par la droite $GN = 2a \sin \theta$.
2. Une spirale elliptique horizontale S_2, commençant par la droite GN et terminant par un grand cercle (rayon $\frac{1}{2}HP = a \cos \frac{1}{2}\theta$).
3. Une spirale elliptique verticale S_3, commençant par un grand cercle et terminant par la droite $KR = 2a \sin \theta$.
4. Une spirale elliptique verticale S_4, commençant par la droite KR et terminant par un petit cercle (rayon $\frac{1}{2}EL = a \sin \frac{1}{2}\theta$).

Ainsi, une figure telle que $2D$ ou $4D$ peut être regardée comme composée de quatre spirales elliptiques.

Les deux spirales horizontales S_1 et S_2 donnent comme image d'interférence (quand $\triangle$ est près de 90°) un système d'hyperboles, dont une des asymptotes coïncide avec la droite horizontale commune GN. De même, les deux spirales verticales S_3 et S_4 font naître un système d'hyperboles avec une asymptote verticale KR. Ces deux systèmes d'hyperboles se couvrent, parce que la bissectrice HP est un axe de symétrie. Il suffit donc d'étudier la combinaison des spirales S_1 et S_2.

Maintenant, il est important de constater le sens de rotation de ces spirales. Les expériences font voir, qu'ayant parcouru la spirale S_1 du cercle à la droite (de l'extérieur à l'intérieur) le point se meut sur la spirale S_2 en sens inverse. Cependant, ce mouvement est dirigé de l'intérieur à l'extérieur. En comparant les deux spirales S_1 et S_2 séparément, il faut prendre toutes les deux p.e. de l'extérieur à l'intérieur et ainsi, elles sont parcourues dans le même sens.

4. Pour définir plus facilement les quatre spirales elliptiques, nous avons parlé de „petit cercle" et de „grand cercle", mais nous avons déjà dit, que la naissance de l'image des hyperboles exige une différence de phase $\triangle$ près de 90°. Ainsi, le „petit cercle" et le „grand cercle" deviennent des ellipses, dont les grands axes coïncident avec les bissectrices LE et PH, c'est à dire: ces axes sont à angle droit. Maintenant, nous pouvons dire, que l'image des hyperboles provient de la superposition de deux spirales elliptiques S_1 et S_2, chacune limitée à l'extérieur par une ellipse, à l'intérieur par une ligne droite dans les conditions suivantes:

1. Les spirales ont le même sens de rotation.
2. La spirale S_1 est plus petite que la spirale S_2.
3. Les lignes droites intérieures doivent coïncider.
4. Les ellipses extérieures ont de grands axes perpendiculaires.

5. La spirale S_1 a les mêmes valeurs constantes de θ et de $\triangle$ que la spirale S_2; on fait varier α de la même manière pour les deux spirales, par conséquent, elles ont le même „nombre d'ellipses".

5. Observons maintenant la figure $4D$, ou plutôt les belles reproductions de ce cas, que l'on trouve dans le Vol. 30, No. 4 et 5, pg. 249, fig. 5 et 6.

On voit que la longueur $2a \sin \theta$ de la droite commune empêche la formation des ovales, qui caractérisent l'image des lemniscates. En diminuant la valeur de θ, on fait diminuer aussi le diamètre $2a \sin \frac{1}{2}\theta$ du petit cercle (ellipse) de la spirale S_1. Cette spirale disparaît pour $\theta = 0$ et avec elle l'image des hyperboles. De la figure totale il reste alors les spirales S_1 et S_4 (S_3 est semblable à S_2), qui donnent maintenant une nouvelle image ($2D$) qui présente quelque ressemblance avec l'image des lemniscates, seulement quant aux courbes extérieures.

L'intérieur ne peut pas donner l'image des hyperboles pour deux raisons:

1. Les spirales S_2 et S_3, reduites à des petites lignes droites, se coupent à angle droit.
2. Les spirales S_1 et S_4 ont des sens inverses de rotation. Car le sens de mouvement tourne dans chacune des deux lignes droites, donc la spirale S_1 est parcourue après la spirale S_4 dans le même sens. Mais alors, la spirale S_4 est considérée de l'intérieur à l'extérieur et la spirale S_1 de l'extérieur à l'intérieur. Considérées toutes les deux de l'extérieur à l'intérieur, elles sont parcourues en sens inverses.

Evidemmant, l'image des lemniscates ne peut être donnée, ni par la figure $4D$, ni par la figure $2D$. Il faut prendre deux spirales elliptiques, traçées séparément et combiner les conditions trouvées. Ce n'est pas difficile — on peut maintenir les cinq conditions trouvées avec la restriction, que les lignes droites intérieures doivent rester très petites.

En outre, les expériences montrent, qu'il faut combiner l'ellipse extérieure la plus grande avec la droite intérieure la plus petite.

6. Pendant les expériences, il a été établi, que l'image des lemniscates se produit aussi par la superposition de deux spirales elliptiques, dont les grands axes des ellipses extérieures coïncident, au lieu de se couper sous un angle droit (table VII, fig. B). Les autres conditions doivent rester les mêmes. On peut distinguer deux cas:

1. La valeur de θ est trés petite; $\triangle = 90°$.
   C'est la figure A, quand les grands axes des ellipses extérieures sont verticaux, parce qu'ils n'ont plus de différence de phase (fig. $2E$ de la table IV).
2. Il n'y a pas de différence de phase θ; $\triangle$ a une valeur près de 90° (fig. $1D$ de la table IV).

Or, il faut remarquer, que nous avons dessiné jurqu'ici la demie-figure

des spirales, parce que les deux parties sont symétriques par rapport à la première bissectrice, ainsi que l'image des lemniscates.

Dans le premier cas ($\triangle = 90°$) cette symétrie n'existe plus pour l'image d'interférence: on obtiendrait deux systèmes de lemniscates, dont les axes sont à angle droit et par conséquent, ce cas ne suffit pas.

Dans le deuxième cas, les figures totales montreraient chacune deux franges noires, rayonnant du centre, qui sont étrangères à l'image des lemniscates. Ce cas ne peut suffire non plus.

Mais on peut remarquer une particularité intéressante: quand on fait tourner la petite spirale de la figure A d'un angle de 90°, les deux ellipses extérieures prennent la position de la figure B avec la seule exception de l'orthogonalité des petites lignes droites intérieures. Ces droites résultent des constructions mathématiques; les expériences montrent, qu'en réalité ce sont des ellipses aplaties. Pour une valeur très petite de θ et une valeur de $\triangle$ tout près de 90°, nous trouvons à l'intérieur des spirales superposées deux séries d'ellipses, presque des cercles, dont les exemplaires correspondants sont presque égaux. Sous ces conditions, on peut dire, qu'après la rotation, l'intérieur de la figure A égale l'intérieur de la figure B, c'est à dire: on retrouve l'image des lemniscates.

Sous les mêmes conditions on voit, que pendant la rotation, cette image subit des variations imperceptibles et ainsi, on peut dire:

l'Image des lemniscates, résultant de la superposition des deux spirales elliptiques

$$S_1 \quad \begin{cases} x = a_1 \cos\alpha \cos\varphi \\ y = a_1 \cos(\alpha + \theta_1) \cos(\varphi + \triangle) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad S_2 \quad \begin{cases} x = a_2 \cos\alpha \cos\varphi \\ y = a_2 \cos(\alpha + \theta_2) \cos(\varphi + \triangle) \end{cases}$$

avec les conditions: $a_1 < a_2$, $\theta_1 > \theta_2$, θ_1 et θ_2 tout près de 0°, $\triangle$ tout près de 90°,

reste la même, quand on fait tourner la spirale S_2 et elle suit le mouvement, quand on fait tourner la spirale S_1.

La supposition la plus simple, celle que la spirale S_2 soit circulaire ($\theta_2 = 0$, $\triangle = 90°$) ne peut pas être admise,

1. parce qu'une superposition d'une spirale elliptique et d'une spirale circulaire ne peut pas donner l'image des hyperboles autour du centre;
2. parce qu'une spirale circulaire montre deux franges noires, qui, dans un seul cas, peuvent coïncider avec les isogyres, mais qui sont étrangères à l'image pendant tous les autres cas d'une rotation.

7. On peut vérifier ces résultats par une autre série d'expériences. Le milieu de l'image des lemniscates peut être regardé comme un système d'hyperboles. Un tel système résulte de la superposition de deux spirales elliptiques S_3 et S_4 (table VII, fig. A). dont les ellipses extérieures ($\triangle$ près

de 90°) sont *égales* avec de grands axes qui se coupent dans l'origine sous un angle droit. Le sens de rotation doit être le même, les droites intérieures doivent coïncider. Quand la longuer de ces droites est maximum, l'image d'interférence est un système d'hyperboles équilatères, avec les axes des coordonnées comme asymptotes. Quand la longueur est minimum, nous trouvons la même image. Dans le premier cas, l'image naît de l'intersection de deux faisceaux d'ellipses aplaties, on peut dire de deux faisceaux de droites, qui donnent un système d'astéroïdes. Dans le deuxième cas on a deux faisceaux d'ellipses arrondies, presque égales, qui ont l'apparence d'un système d'anneaux circulaires [1]).

Quand on diminue une des spirales, les hyperboles s'allongent pour devenir des lemniscates dès le moment, que l'ellipse extérieure de la spirale S_3 rentre dans la circonférence de l'ellipse S_4. Alors, on a la situation de la figure *A*, table VII.

Il faut remarquer, que la coïncidence des petites droites intérieures est nécessaire — donc, il y a toujours une petite différence de phase θ. Sans cette différence, ou sans une différence $\triangle$, la superposition „aux ellipses extérieures croisées" amènerait des droites intérieures croisées, et alors l'image montre un système de rosaces (fig. 5, table VII).

8. Pour que la figure des lemniscates soit formée, il faut et il suffit que les conditions trouvées soient remplies.

Quand, dans la figure *A*, table VII, les lignes droites sont égales, mais trop longues, on obtient fig. 1, table VII, c'est à dire: les deux ovales, à demi formés, sont réunis dans un seul ovale (ellipse). l'Image peut donner des anneaux elliptiques.

Quand, dans la figure *A*, les ellipses extérieures sont conformes et que l'on tourne la petite spirale d'un angle de 90°, l'image donne de nouveau des anneaux elliptiques (fig. 2). En allongeant la petite spirale, ces anneaux deviennent des lemniscates.

Quand les droites intérieures diffèrent trop de longueur, on obtient après la rotation la fig. 3. Alors, les ovales sont trop pointus.

Quand une des spirales devient circulaire, les courbes d'interférence sont dirigées vers le centre (fig. 4).

Quand les ellipses extérieures de la fig. *A* sont égales, l'image d'interférence montre un système d'hyperboles équilatères (fig. 6).

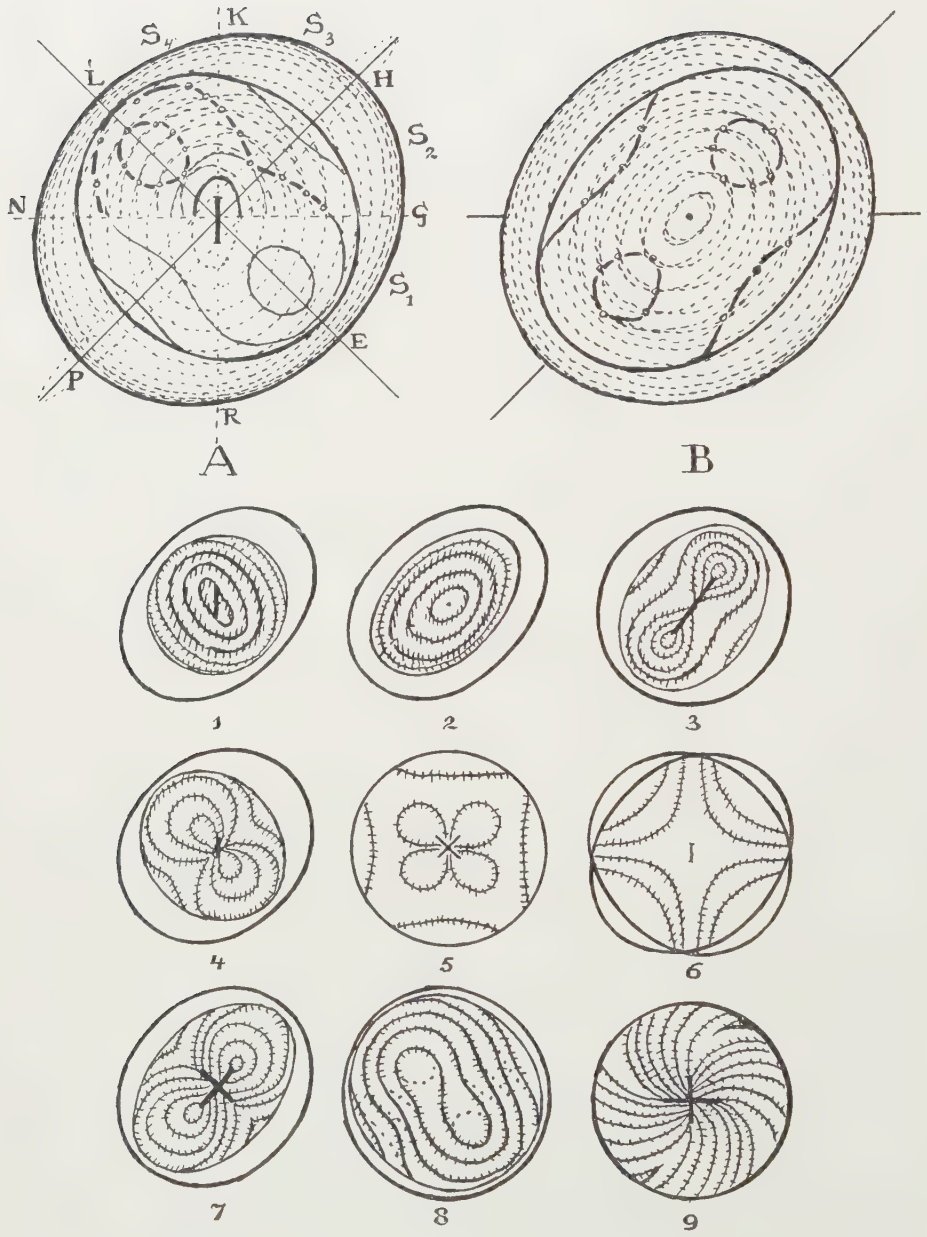
Quand, dans ce même cas, on fait tourner une des spirales d'un angle de 90°, l'image montre des rayons courbes (fig. 9).

Deux spirales elliptiques égales, sans différence de phase $\triangle$ et dont les droites sont orthogonales, donnent l'image de la fig. 5.

Quand une de ces spirales devient plus petite, on voit apparaître l'image de la fig. 7.

---

[1]) Un bel exemple d'un système d'anneaux avec les hyperboles d'interférence se trouve dans le travail de Mr. T. K. CHINMAYANANDAM, On HAIDINGER's Rings in Mica, Proc. Royal Society, Vol. XCV, pg. 176—189.



La plus remarquable de toutes ces variations, c'est le changement du sens de rotation. Quand toutes les conditions sont remplies, sauf celle des sens égaux, on voit une spirale d'Airy au lieu des lemniscates (fig. 8). La relation entre ces deux images est indiquée par une ligne pointillée.

9. *Résumé.*

Soit donnée une vibration elliptique, presque circulaire, qui commence par l'ellipse $x = p \cos \varphi$, $y = p \cos (\varphi + \triangle)$ ($\triangle$ près de 90°).

Le grand axe de cette ellipse coïncide avec la bissectrice de l'angle XOY d'un système de coordonnées rectangulaires; la courbe est parcourue de gauche à droite.

Supposons, que le mouvement se rétrécit, pendant que le grand axe tourne d'un angle de 45°, et finit par une petite ellipse aplatie, dont le grand axe est vertical. Alors, nous avons obtenue une spirale elliptique S_3 (fig. *A*, table VII).

l'Image de cette spirale, réfléchie par rapport à la première bissectrice, est une spirale S_2. l'Ensemble des deux spirales est représenté par la formule

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi$$
$$y = a \cos (\alpha + \theta) \cos (\varphi + \triangle)$$

(θ très petit et $\triangle$ près de 90°).

Observons la spirale S_3.

l'Image de l'ellipse extérieure, réfléchie par rapport à l'axe des Y, peut être représentée par la formule

$$x = -p \cos \varphi$$
$$y = p \cos (\varphi + \triangle)$$

la courbe est parcourue dans le même sens.

Appelons S_4 la spirale elliptique, qui, commençant par cette ellipse, se rétrécit et se termine par la même petite ellipse que la spirale S_3. Ainsi, S_3 et S_4 sont deux spirales égales, presque circulaires, parcourues dans le même sens, dont les ellipses extérieures se croisent sous un angle droit et dont les ellipses intérieures coïncident.

La superposition de ces spirales donne l'image des hyperboles équilatères (en général pour toutes les valeurs de θ et de $\triangle$).

Faisons diminuer la spirale S_4.

l'Image d'interférence montre d'abord un système d'hyperboles, puis un système de lemniscates [1]). Dans le dernier cas, l'ellipse intérieure de S_4 doit être un peu plus grande que celle de S_3; l'ellipse extérieure de S_4 ne doit pas être conforme à celle de S_3, mais un peu plus aplatie. Ainsi, on peut parler de la superposition d'une vibration circulaire S_3 et d'une vibration elliptique S_4, cependant sans perdre de vue, que la condition nécessaire pour la naissance de l'image des lemniscates et des hyperboles est, que l'angle des grands axes des ellipses correspondantes des deux vibrations varie de 0° à 90° et a pour bissectrice un des deux diamètres communs aux ellipses extérieures.

---

[1]) Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurkunde, Vol. **24**, No. 4 et 5, les figures 1 et 2.

Quand les ellipses intérieures sont égales et assez grandes, l'image montre un système d'anneaux elliptiques.

Pour θ près de 0° et $\triangle$ près de 90°, l'image d'interférence reste la même, quand on fait tourner la spirale S_4 autour de son centre.

Les spirales symétriques S_1 et S_2 donnent la même image que les spirales S_3 et S_4: les éléments correspondants des lignes en zig-zag, qui forment les courbes d'interférence, sont à peu près orthogonaux.

La superposition des deux spirales inégales S_3 et S_4, parcourues en sens inverses, donne une spirale d'Airy.

10. Quelques résultats d'un grand nombre d'expériences sont réunis dans les tables VIII et IX.

Fig. 1 et 2, table VIII montrent deux vibrations elliptiques, qui satisfont aux conditions trouvées, savoir:

a. elles sont parcourues dans le même sens.

b. l'ellipse extérieure de fig. 1 est plus petite que celle de fig. 2; l'ellipse intérieure, au contraire, est plus grande.

c. le grand axe de l'ellipse extérieure de fig. 1 fait un angle de 45° avec l'axe des Y à droite, celui de fig. 2 à gauche.

d. les grands axes des ellipses intérieures des deux vibrations coïncident avec l'axe des Y.

e. les deux figures ont un même nombre de courbes, quand chacune est envisagée comme un système d'ellipses.

La superposition de ces deux spirales donne une image d'interférence (fig. 3), qui reste à peu près la même, quand on fait tourner la petite spirale autour de son centre. Une des variations est représentée par fig. 4. Le résultat, quoique suffisant pour confirmer la théorie, peut être corrigé par des ellipses intérieures moins aplaties.

Sous la même réserve, la fig. 5 et la fig. 6 représentent un système de lemniscates avec plus de courbes d'interférence.

La table IX, fig. 1, montre la naissance de l'image des hyperboles, dans le cas de deux vibrations presque circulaires. La différence entre les spirales croisées ne se manifeste qu'à quelque distance du centre.

Table IX, fig. 2. Le même cas: les ellipses intérieures sont plus aplaties. Sauf une irrégularité autour du centre, la figure ressemble à l'image d'interférence de topaze, quand la lame cristalline est coupée perpendiculairement au 1er diamètre [1]).

La figure de Mr. CHINMAYANANDAM, déjà citée [2]), appartient à cette catégorie.

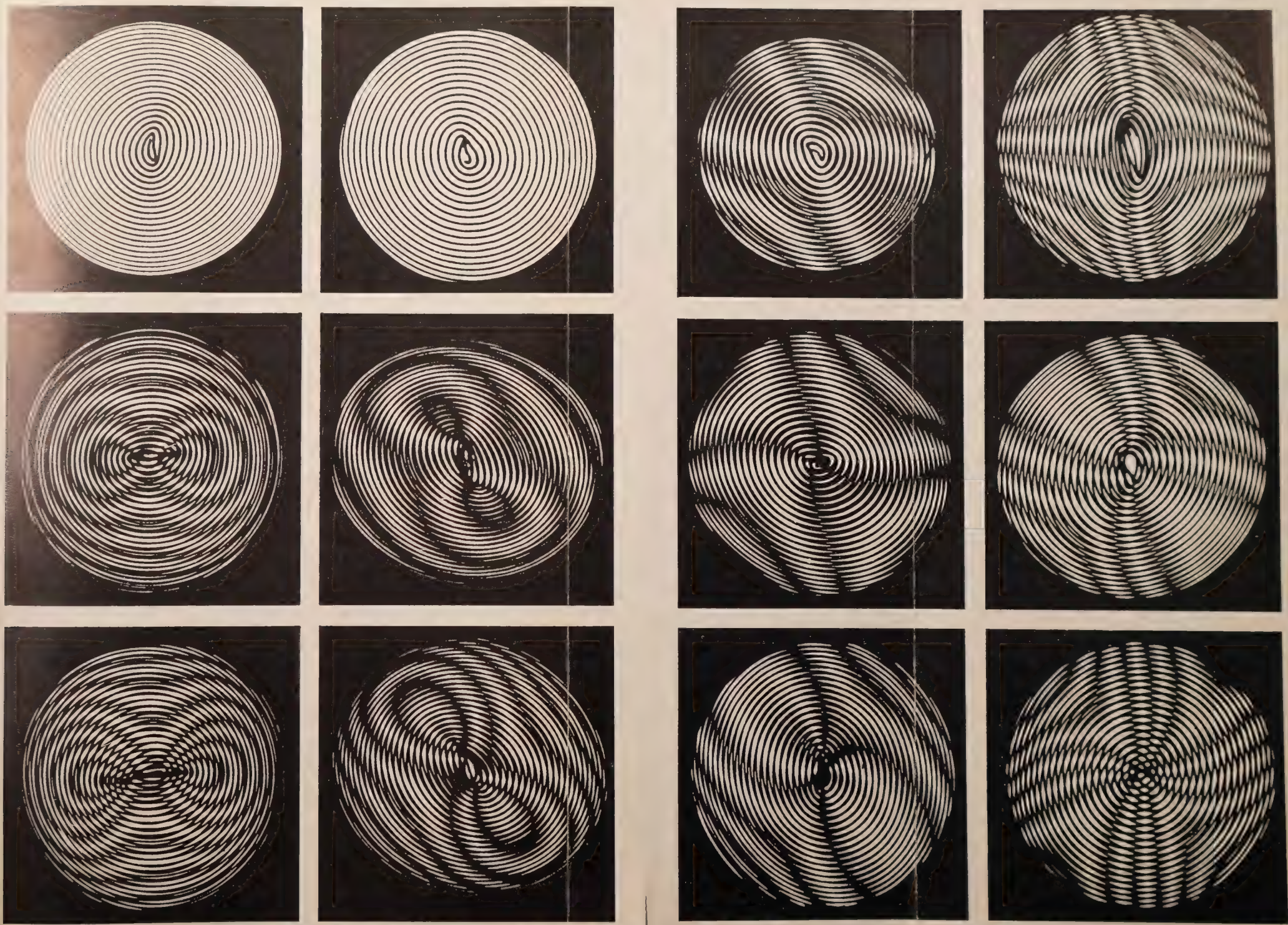
Fig. 3 de la table IX peut être regardée comme la négative de la fig. 1.

Table IX, fig. 4. Une telle image se présente quand une des spirales est circulaire.

---

[1]) POCKELS, Lehrbuch der Kristalloptik, Tafel IV, fig. 4.

[2]) Proc. Royal Society, Vol. XCV, pg. 176—189.



A la table IX, fig. 5, l'ellipse extérieure de la petite spirale est tangente à l'ellipse extérieure de l'autre.

Table IX, fig. 6. Les deux spirales elliptiques se coupent orthogonalement jusqu'au centre. Les ellipses intérieures sont égales et trop aplaties. On voit, que la moindre irrégularité suffit pour modifier l'image des lemniscates.

LITTÉRATURE.

Pour le problème fondamental:

D. J. KORTEWEG, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk. Vol. **5**, No. 8 (1897); Arch. Néerl., Vol. I, série 2, pp. 229—260.

Pour la théorie des courbes-enveloppes:

H. J. E. BETH, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk., Vol. **27** et **28** (1919/20); Phil. Mag. Aug. 1913.

Pour les images d'interférence obtenues à l'aide d'un appareil à quatre pendules, les communications suivantes de ma main:

J. W. N. LE HEUX, Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk., Vol. **23**, No. 8; Vol. **24**, No. 4 et 5; Vol. **25**, No. 3 et 4; Vol. **32**, No. 10 (1929); Vol. **41**, No. 4 (1938). Avec la littérature qui s'y rapporte.

Physics. — *On the rate of reaction in the system mineral oil/oxygen and the mechanism of the influence of copper and tin on this system.* By D. J. W. KREULEN and D. TH. J. TER HORST. (Communication from the Laboratory for Coal- and Oil Research at Rotterdam and from the Physical Laboratory of the University of Utrecht.) (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

For the measurement of the rate of reaction in the system liquid/gas two methods are available.

A. The method originating from A. TITOFF [1]). It is characterized by the application of a pure homogeneous medium. In this method the gas (in our case oxygen) is introduced into the liquid till saturation is obtained. Then the liquid is completely separated from the gas-phase and it is allowed to react at the temperature which is wanted. One is able to calculate the velocity constant K of the reaction from the equation:

$$K = \frac{1}{t} \lg \frac{A}{(A-x)}.$$

A being the quantity of the gas in gm. molecules per litre at the beginning of the test and $(A-x)$ that at the time t. As the active mass of the liquid remains practically constant the monomolecular law is followed. In our case this method has a disadvantage on account of the small solubility of oxygen in oil. Thus the original concentration of the oxygen is small and the problem is to estimate these relative small quantities with sufficient accuracy.

B. The method originating from R. LUTHER and J. PLOTNIKOW [2]). In this method as well the liquid- as the gas-phase is present during the reaction. Both together form one closed system; precaution is taken to prevent any escape of gas from it. The gas-phase is continually stirred into the liquid-phase. To obtain this a hollow glass stirrer of special construction is used. The lower part of it has the form of a SEGNER's water wheel; it serves to divide the gas into the liquid. At the top of the hollow glass-spindle a couple of small openings is made through which the gas-phase is allowed to enter into the stirrer. When the stirring velocity is increased the gasphase is more intensely introduced into the liquid. A mercury-seal enables to drive the stirrer from outside the reacting system by a small electromotor.

---

[1]) Ztschr. f. Phys. Chemie, XLV, 1903, pag. 641—648.

[2]) Ztschr. f. Phys. Chemie, LXI, 1908, pag. 513—544.

During the reaction the oxygen in solution will have a tendency to decrease. One has to choose that stirring velocity which corresponds with a large supply of oxygen in comparison with the decrease of concentration resulting from the reaction. Only in this case comparable oxidation velocities are measured.

For the study of the system mineral oil/oxygen, method *A* is but used in one series of investigations [3]). We consider this work as essentially correct. Moreover in technics a great many "ageing tests" exist as f.i. the I.P.T. test; the British Air Ministry test; the B.S.I. test; the Indiana oxidation test e.s.o. In all these tests either air or oxygen is passed at a certain rate through the oil which is maintained at an arbitrary choosen temperature. After a certain period of heating the alteration of one or more constants is determined.

Thus these tests correspond to the *B*-method. However in no case the conditio sine qua non: solution velocity $>$ reaction velocity is fulfilled. This was proved by the following experiments. We used the method and apparatus introduced by LUTHER and PLOTNIKOW in the modification as described by W. REINDERS and S. I. VLES [4]). In this apparatus a medicinal paraffin oil was oxidized at 100 deg. cent.

The increase of the dipole moment was followed as a function of the oxidation time. Measuring the dielectric constant we used the ordinary high frequency-method.

To indicate the reaction velocity we choosed the tangent from the line giving the dipole moment as a function of time.

In figure 1 the reaction velocity is plotted as a function of the velocity of stirring. It is clear that the measured velocities are independent of the

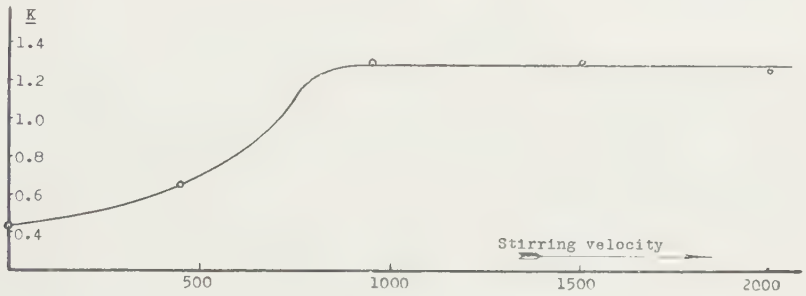


Fig. 1.

intensity of stirring when this is higher than 1000 revs. p. min. To be absolutely sure, in the further experiments a velocity of 1500 revs. p. min. was applied. Then the reacting system is a milk white liquid in consequence of many small oxygen bubbles which are divided in the liquid.

Now by the technical tests mentioned before a quantity of gas varying

[3]) C. JANSSEN Czn. Archiv f. Electrotechn. **25**, 567 (1930); L. S. ORNSTEIN, C. KRIJGSMAN and D. TH. J. TER HORST, Physica (II) 3, 1935, pag. 201.

[4]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays Bas. XLIV, 1925, pag. 1.

from 2- till 15 liters per hour is passed through the oil. It is obvious that in this case, even in approximation, the critical solution velocity is not realized. Therefore, both for the measurement of reaction velocities as well from the standpoint of exactness one is obliged to reject these tests.

The oil with which the experiments were carried out had the following constants: molecular weight 445; density 20/4 0.8833; refractive index $D/20$ 1.4828; aniline point (critical solution temperature) 109.0 deg. cent; specific dispersion

$$\frac{(N_{G'} - N_C)\, 10^4}{d} = 158\,;$$

surface tension at 20 deg. cent. 32.1 dyne/cm.

According to J. C. VLUGTER, H. I. WATERMAN, H. A. VAN WESTEN and J. J. LEENDERTSE [5]) we are able to get from these constants an idea with regard to the average constitution of the oil molecules. So we found: aromatic rings 0 %; naphtenic rings 37 %; paraffinic side chains 63 %; extra tertiary carbon atoms 5 (which corresponds with a very moderate branching of the paraffinic side chains) and average number of rings per molecule = 2.8. The figure for the average number of rings per molecule is absolutely exact if one takes the average molecular weight into account. In order to calculate the percentage of naphtenic rings and paraffinic side chains a supposition has to be made. In our case we have assumed that we had to do with polycyclic 6-ring naphtenes.

The dipole moment was estimated as the difference between the molecular polarisation and the molecular refraction at a temperature of 20 deg. cent. according to the equation:

$$\bar{\mu} = 0.0127 \,.\, 10^{-18} \sqrt{(P - P_0)\, T}$$

where μ is the average dipole moment; P the molecular polarisation; P_0 the molecular refraction and T the absolute temperature. If we assume ε the dielectric constant, N the refractive index, M the molecular weight and d the density we have:

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} \text{ and } P_0 = \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \cdot \frac{M}{d}\,.$$

For the unaltered oil, in which no polar compounds are present, we found for P, in first approximation, the same value as for P_0 (143.21 respectively 143.82). We corrected for this small difference at the beginning of the experiments.

Now during the oxidation the average molecular weight did not change; in each case the variations which were found are within the accuracy of the experiment. The accuracy of $\bar{\mu}$ is therefore dependent from the reliability with which the density, the dielectric constant and the refractive

---

[5]) J. Inst. Petroleum Techn. **21**, 661—701 (1935); Ibid. **24**, 16 (1938).

index can be measured. The density and the refractive index are reliable to within 2 pro mille. The dielectric constant however is only reliable to within $\frac{1}{2}$ %.

Now about fifty experiments showed us that a simple relation exists between the increase of the density and that of the dielectric constant. In figure 2 the dielectric constant is plotted against the density. A straight-

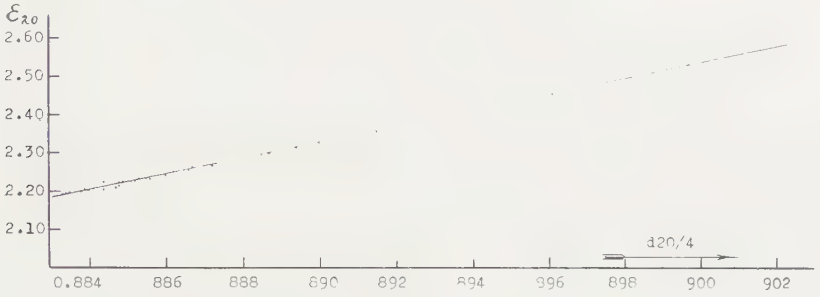


Fig. 2.

line relationship is obtained, the deviations from the average line are lying well within the accuracy of the experiment.

It is possible to explain this straight-line relationship.

The general scheme of reaction is given by:

a molecules of oil + b molecules of oxygen $\rightarrow$ c molecules of polar oil + d molecules of water.

At the time $t = 0$ we have from the oil n particles and at the time $t = t$ we have from the oil $(n - x)$ particles. Thus the density of the oxidized oil $s = (n - x)m_0 + \frac{c}{a} xm_p + \frac{d}{a} xm_w$; m_0, m_p and m_w being respectively the mass of an oil-, polar oil- and watermolecule.

As $am_0 + bm_{0_2} = cm_p + dm_w$ we get $x = \frac{\triangle s}{m_{0_2}} \cdot \frac{a}{b}$; $\triangle s$ being the increase in density.

Now

$$\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} = \frac{4\pi}{3} nA_0$$

(A_0 being the polarisation per oil-molecule) and

$$\frac{\varepsilon_t - 1}{\varepsilon_t + 2} = \frac{4\pi}{3} (n - x) A_0 + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{c}{a} xA_p + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{d}{a} xA_w$$

thus:

$$\frac{\varepsilon_t - 1}{\varepsilon_t + 2} - \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} = 3 \frac{\triangle \varepsilon}{(\varepsilon_0 + 2)^2} = \frac{4\pi a}{3 b m_{0_2}} \triangle s \left[\frac{c}{a} A_p + \frac{d}{a} A_w - A_0 \right].$$

Now A_w is known, A_0 follows from our experiments and with regard to A_p we made an estimation.

In our experiments we found $\frac{\triangle \varepsilon}{\triangle s}$ to be 20.77 (figure 2). Thus one comes to the result that $2a + 2b = 4c + 1d$ which is acceptable if we assume an average scheme of reaction in which the oil is as well converted into alcohols, ketons, water as acids.

Consequently it is possible to increase the accuracy with which the average dipole moment can be estimated by the following procedure. The dielectric constant which is found is used to cheek whether the relationship between the density and the dielectric constant holds. This being the case we calculate the average dipole moment with that value of ε which is obtained from the more exact density with the aid of the line given in figure 2.

It is desirable to state that already W. N. STOOPS [6]) realized that the decomposition in transformer oils may be followed rather closely by measuring the dielectric constant of the oils as they deteriorate in service.

Also by J. L. HIDDINK [7]) the change in polar characteristics of transformer oil was measured in laboratory tests.

A more extensive and systematical research however was not yet carried out. In connection with this we remember of the remark made in 1936 by L. S. ORNSTEIN, D. TH. J. TER HORST and G. H. FREDERIK: "it might be important to point out that one is able to follow chemical reactions measuring the dipole moment as function of time" [8]).

We too set much value on the introduction of the average dipole moment to characterize the degree of oxidation which is reached by an oil. For if an oxygen molecule takes hold of an oil molecule, the first result will be the introduction of a polar group into the system. Moreover the average dipole moment includes all the oxidation stages while other figures as f.i. the acid value, represent but one oxidation stage. In figure 3 the increase of the dipole moment is plotted as a function of time. The experiments were carried out at 100 deg. cent.

From figure 3 one sees that not until an induction period (or initial period of slow reaction) is passed an appreciable increase in polar compounds can be observed.

Beyond this induction period there exists a straight line relationship between μ and the time of oxidation. During our experiments we got the impression that the introduction of polar compounds in the system does not begin suddenly but that a slight and increasing reaction exists in the latter part of the induction period. Although this observation is very probable correct, the reaction itself is so small that the phenomenon is quite within the accuracy of the experiment. We are therefore only allowed to mention it as an indication in this direction.

---

[6]) Physics, Vol. II, 1932, pag. 322.

[7]) Diss. Utrecht 1932.

[8]) Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **39**, 325 (1936).

In figure 3 besides μ also the increase of the acid value is given as a function of time. One sees that it is difficult to conclude from the latter

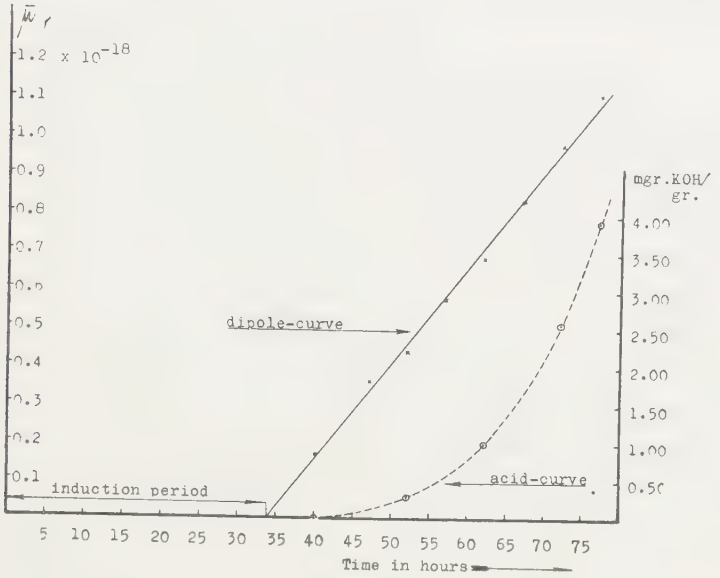


Fig. 3.

curve where the period of induction comes exactly to an end. Similar phenomenons are inhaerent in the curves which represent the alteration of other quantities as a function of time. Thus the superiority of μ for the estimation of the length of the period of induction will be obvious.

The existence of a period of induction includes that any judgment of oils which is but founded on the alteration of a certain constant, after a fixed time of reaction, is incorrect. With regard to this we refer to figure 4.

Oil 1 possess a larger reaction velocity than oil 2 as $tg\,\alpha_1 > tg\,\alpha_2$. Yet one would be obliged to conclude to quite the reverse if only one measure-

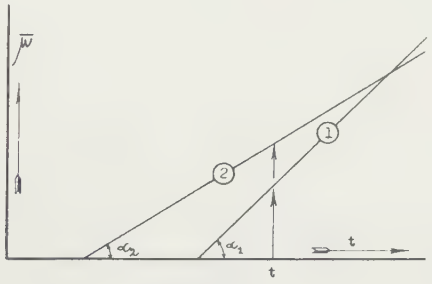


Fig. 4.

ment at the time t was taken. This is caused by the different length of the period of induction of the two oils.

For the determination of reaction velocities in our system it is therefore necessary to measure during the whole test; the induction period included.

We now pass on to the influence of metals on the rate of reaction. In a series of experiments copper filings (electrolytic copper) were used. These filings passed a sieve with 400 openings pro sq. cm. Tests were carried out without any addition of the metal; subsequently with oils containing an increasing quantity of metal. The progress of $\bar{\mu}$ was measured for every period of five hours and so it was possible to deduce at the end of the experiment both the length of the period of induction and the reaction velocity. The magnitude of the reacting surface of the filings is directly proportional to the number of grams which are added. After that the reaction velocity was definitely established in the presence of the metal (dotted lines in figure 5) the experiment was discontinued. The oil was divided among four centrifuge tubes and centrifugated at a rate of 1500 rvs. per min. With the supernatant oil, in which no solid metal was present, the experiment was then continued (drawn lines in figure 5).

The lines marked D_{6a} and D_{6b} refer to experiments with oil without any metal but with different quantities of oil (respectively 250- and 125 cm³).

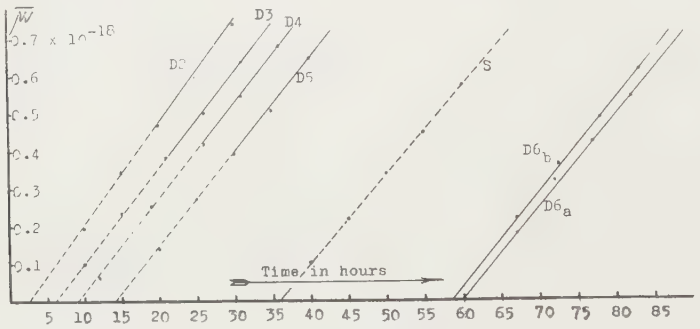


Fig. 5.

The lines marked D_2, D_3, D_4 and D_5 refer to such in which to 250 cm³ of oil respectively 10-, 5-, $2\frac{1}{2}$ and $1\frac{1}{4}$ grms of copper filings are added. Line S refers to an experiment with tin which is mentioned below. The magnitude of the tin surface in this test is comparable with the copper surface added in test D_4.

In figure 6 the length of the induction period is plotted as a function of the number of grams of copper filings which are added. It appears that the first quantities of surface, which are added, are the most active. This suggests the possibility of an adsorption phenomenon.

To verify this assumption a same quantity of copper filings ($2\frac{1}{2}$ grams) were brought into contact with the oil for different spaces of time. This contact was realized within the usual conditions; thus at 100 deg. cent. applying stirring. After the choosen space of time the experiment was discontinued. The copper filings were centrifuged and the work was continued with the supernatant pure oil.

Now it appeared that the length of the period of induction was quite the

same, either for a time of contact of say one hour or for a time of contact agreeing with the complete induction period.

Figure 7 is a common curve of adsorption. To be absolutely sure an experiment was carried out in which the contact of metal and oil was realized in a nitrogen atmosphere for two hours. In this case too the

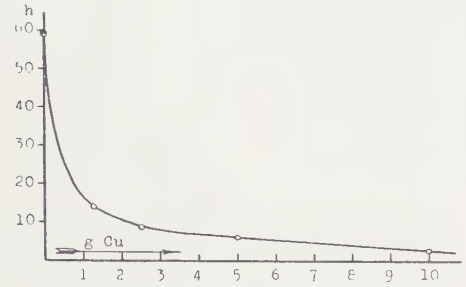


Fig. 6.

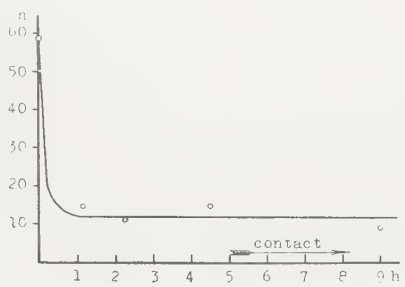


Fig. 7.

induction period decreased and well from 60 hours for the original oil to 17 hours. This proofs that we are justified to speak in our case from adsorption.

According to MOUREUX and DUFRAISE [9]) the existence of an induction period is the result of the presence of antioxydants which are often able to exercise their influence in rather small quantities. If we accept this theory to be correct then it is evident that, a metal surface being present, the length of the induction period is a function of the time necessary to destruct that part of the antioxydant which is not adsorbed. The largest quantity of antioxydant is adsorbed by the first sq. cms of metal surface which are added (largest concentration of antioxydants). This explains why the first quantities of metal exert such a great effect. The subsequent quantities of metal meet with lower concentrations of the antioxydant, thus the adsorption, and consequently the effect on the length of the induction period, decreases.

After the induction period no influence whatever is exerted by electrolytic copper. With regard to the reaction velocity this metal is thus completely inert; it is entirely unjustified to speak about a catalytic effect in our case.

Thus when previous workers concluded that the reaction in question is catalyzed by copper, they were very probably deceived by the influence of copper on the length of the induction period (figure 4). Especially in experiments carried out at relative low temperatures, where the length of the induction period is of great importance, neglecting this phenomenon leads to serious mistake.

A corresponding experiment was carried out with Chempur-tin. Here

[9]) Chim. Ind. Tôme 18, pag. 3, 1927; Premier Congrès de la Sécurité aérienne, t. 1. 1931, pag. 55; Bull. Soc. d'Encourag. à l'Ind. Nat. février 1934.

too the same result was obtained; a shortening of the induction period and no influence on the reaction velocity. It appeared that tin is less active than copper. So for the original oil, without any supply of metal, the induction period was found to be 60 hours. By supplying a certain surface of copper filings this time was reduced to 8 hours. Using the same surface of tin however we got an induction period of 36 hours. As most of the anti-oxydants contain polarisable nitrogen containing groups [10]) this experiment affirms the well known fact of a higher relative affinity of adsorption for these compounds in the case of copper as in that of tin.

In this investigation not only the alteration of the dipole moment but also that of peroxides, acid value, saponification number, density and viscosity was measured. All these quantities are absolutely independent from the presence of copper or tin, provided one takes the induction period into account. It may be possible that an influence on the reaction velocity exists if one adds such compounds as f.i. copper stearate getting thus a homogeneous system. However such an influence, if it exists, must be regarded as a phenomenon of induced oxydation. It is therefore that we consider the addition of soluble organic metal compounds for the study of specific metal actions as incorrect.

Finally we also tried to get an idea about the mechanism of the oxidation of our oil. Therefore the number of particles which were estimated respectively as peroxides, acids and saponifiable compounds, were plotted on a logarithmic scale as a function of the time of oxidation. For small values of the time straight lines were obtained which show the tangent 1.0 for peroxides (indicating a first oxidation stage) and 2.9 for acids (third oxidation stage).

For the increase of the saponification number however we found in this way the tangent 1.4; a value which is difficult to explain.

Acknowledgement. First of all we wish to express our sincere thanks to Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN for his interest in our work. It was this interest which enabled us to obtain the desired apparatus for the measurement of the dielectric constant.

We are also indebted to Mr. G. H. FREDERIK for his disinterested help in connection with the construction of the apparatus.

Then we wish to thank Dr. W. P. JORISSEN who kindly furnished us with the oxidation apparatus. The costs of construction of this apparatus were defrayed out of an endowment supplied by the "Hoogewerff-fonds".

Finally we wish to mention the intensive co-operation in the experimental part of this work of Mr. J. C. HEYNRAETS.

Rotterdam, / *Utrecht,* December 1939.

[10]) E. VELLINGER and N. SAITO, 2e Congrès Mondial du Pétrole. Paris, juin, 1937.

Physics. — *The decay of the penetrating cosmic rays.* III. By E. M. BRUINS. (Communicated by Prof. J. CLAY.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

§ 1. *The* GROSZ*-reduction.*

The relation between the unidirectional intensity ψ and the total intensity I of cosmic rays has been discussed by B. GROSZ [1]), the fundamental assumptions being:

1. the primary rays are isotropic
2. the absorptionfunction is the same in any direction
3. the intensity is a unique function of the mass per cm^2 traversed.

This well-known GROSZ-reduction, normalising ψ in such a way that at the top of the atmosphere $\psi = I$, is given by

$$\psi = I - x\frac{dI}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

x being the depth below the top of the atmosphere in gr per cm^2.

The conditions 2 and 3 do not hold for the penetrating cosmic rays. Therefore the GROSZ-reduction cannot be correct; neither in the atmosphere nor in a layer of absorbing material. It is easy to prove, that for non-isotropic rays, obeying the conditions 2 and 3 the relation (1) has to be replaced by (see § 3 and § 4)

$$\psi = I - \frac{1}{p+1}\, x\frac{dI}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

the intensitydistribution of the primary rays with the zenith angle ϑ being:

$$F_\vartheta = F_0 \cos \vartheta^p$$

§ 2. We wish to stress an important relation between the correction-factors K_ϑ for the decay in different directions. Suppose the differential energyspectrum in the direction ϑ at the height H, where the penetrating rays are created, is $F_\vartheta(E)$. Then the energy spectrum at a depth h below this layer will be [2]):

$$N(E - \triangle E, h) = F_\vartheta(E) \,.\, K_\vartheta(E)$$

---

1) B. GROSZ, Zs. f. Physik **83**, 214 (1933).

2) These relations have been deduced and used in these Proceedings **42**, 54 and 740 (1939).

where

$$\triangle E = A \sec\vartheta\,(e^{\beta h}-1) \qquad A = \frac{m_0\, a}{\beta}\, e^{-\beta H}$$

$$K_\vartheta(E,h) = \left[\frac{E - A\sec\vartheta\,(e^{\beta h}-1)}{E\, e^{\beta h}}\right]^{\frac{\alpha\sec\vartheta}{\beta(E+A\sec\vartheta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

From (3) we obtain the important relation used in the previous papers,

$$\underline{K_\vartheta(E\sec\vartheta, h) = K_0(E,h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

§ 3. *Reduction in a strongly absorbing layer.*

In a layer of strongly absorbing material we can neglect the decay as compared to the absorption. The intensity in the direction ϑ under a *total* absorbing layer of x gr per cm^2 being $\psi_\vartheta(x)$ we have, when t represents the energyloss per gram per cm^2, *in the absorbing layer*:

$$\psi_\vartheta(x\sec\vartheta) = \int_{t\,x\sec\vartheta}^{\infty} F_\vartheta(E)\, K_\vartheta(E)\, dE$$

from which it follows

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -t\, F_0(tx)\, K_0(tx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

The total intensity $I(x)$ will be

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{t\,x\sec\vartheta}^{\infty} F_\vartheta(E)\, K_\vartheta(E)\, dE.$$

In the absorbing layer the correctionfactor $K_\vartheta(E,h)$ must be calculated with $h =$ constant $=$ equal to the depth of the *top* of this layer. Using (4) and $F_\vartheta(E) = F_0(E)\,\cos\vartheta^p$, we find

$$\frac{dI}{dx} = -t\, K_0(tx) \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\, F_0(t\,x\sec\vartheta)\cos\vartheta^{p-1}\, d\vartheta$$

or with $tx\sec\vartheta = \xi$

$$\frac{dI}{dx} = -t^{p+1}\, K_0(tx)\, x^p \int_{t\,x}^{\infty} \frac{F_0(\xi)}{\xi^{p+1}}\, d\xi$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \left(\frac{d\ln K_0}{dx} + \frac{p}{x}\right)\frac{dI}{dx} + \frac{t\, K_0(tx)\, F_0(tx)}{x}$$

or, using (5)

$$\frac{d\psi_0}{dx} = \left(p + x\frac{dln\,K_0}{dx}\right)\frac{dI}{dx} - x\frac{d^2I}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Normalising ψ_0 in such a way, that at the top of the absorbing layer ($x = x_a$), $\psi = I$ the integration of (6) leads to

$$\psi = I - \frac{1}{p+1}\,x\frac{dI}{dx} + \frac{1}{p+1}\int_{x_a}^{x_1} x\frac{dI}{dx}\cdot\frac{dln\,K_0}{dx}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

§ 4. *Special remarks.*

a. For non decaying particles we have $K = 1$, and (7) reduces to (2). With $p = 0$ we obtain (1).

b. As generally $\frac{dI}{dx} < 0$ the second term in (7) is positive, whereas the third term is negative. The ordinary or the corrected GROSZ-reduction (2) will be too great for decaying particles.

c. From (6) it follows [3]) that I and ψ are proportional only when the primary energyspectrum $F(E)$ is proportional to E^{-s}. If $I = c\psi$ we find $cs = (p+1)\,(1-c)$.

d. From (3) we obtain G being the wateraequivalent of the *total* atmosphere when

$$x = G\zeta \qquad x_a = G\eta$$

$$ln\,K_0 = \frac{\alpha}{\beta\,t\,G}\cdot\frac{ln\left(1-\frac{1}{\eta}\right)(1-\eta/\zeta)}{(\zeta+1-\eta)}$$

---

[3]) From (7) we have, using $\frac{d\psi}{dx} = u$ and $I = c\psi$

$$(p+1-cp)\,u = -c\,x\frac{du}{dx} + cu\,x\frac{dln\,K}{dx}$$

or

$$ln\,u = ln\,K + \frac{cp-p-1}{c}\,ln\,x + constans$$

$$\frac{d\psi}{dx} = constans\,.\,K\,x^{\frac{cp-p-1}{c}}$$

Comparing with (5) we see that the differential energyspectrum

$$F = constans\,x^{\frac{cp-p-1}{c}}$$

The integral spectrum is therefor proportional to x^{-s} if $cs = (p+1)\,(1-c)$.

The constant $\frac{\alpha}{\beta t G} \simeq \frac{1}{\tau}$ [4]), τ being the lifetime of the particles in 10^{-6} sec. The third term in the relation (7) is inversely proportional to the lifetime.

§ 5. *On the reduction in the atmosphere.*

In the atmosphere the correctionfactor is a function of x. The reduction can therefore, generally speaking, become very complicated.

If, however, $F_\vartheta(E)$ is a *homogeneous* function of E of degree $-s$, then we have:

$$\psi_\vartheta(x \sec\vartheta) = \int_{tx\sec\vartheta}^{\infty} F_\vartheta(E)\, K_\vartheta(E)\, dE$$

With $E = ty \sec\vartheta$ we find

$$\psi_\vartheta(x \sec\vartheta) = t \cos\vartheta^{p+s-1} \int_x^\infty F(ty)\, K(ty, x)\, dy = \cos\vartheta^{p+s-1}\, \psi_0(x)$$

whereas

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, \psi_\vartheta(x \sec\vartheta) = \frac{1}{p+s}\, \psi_0(x)$$

In the atmosphere we find for every function F, homogeneous in E, the reduction

$$\underline{I(x) = \frac{1}{p+s}\, \psi(x).}$$

§ 6. *Comparison with experimental data.*

We apply the results of § 3 to the measurements with counters and the ionisationchamber performed by P. H. CLAY and A. v. GEMERT and J. CLAY [5]), in 0—50 m of water. The ionisationmeasurements are given in Fig. 1, curve *I*.

---

[4]) Using

$$\beta = \frac{1}{8} KM^{-1}, \quad \alpha = \frac{\mu c^2}{\tau_0 c}, \quad t G = 2 \times 10^9 e V, \quad \mu c^2 = 8 \times 10^7 e V$$

we have

$$\frac{\beta t G}{\alpha} = \frac{60 \tau_0 \times 10^{-6}}{64} \simeq \tau.$$

[5]) These Proceedings **41**, 694 (1938) and Physica **6**, 184 (1939).

The GROSZ-reduction for isotropic rays created at a wateraequivalent of 9 and 5 meters above sealevel ($\eta = 0.9$ and $\eta = 0.5$) gives us the curves

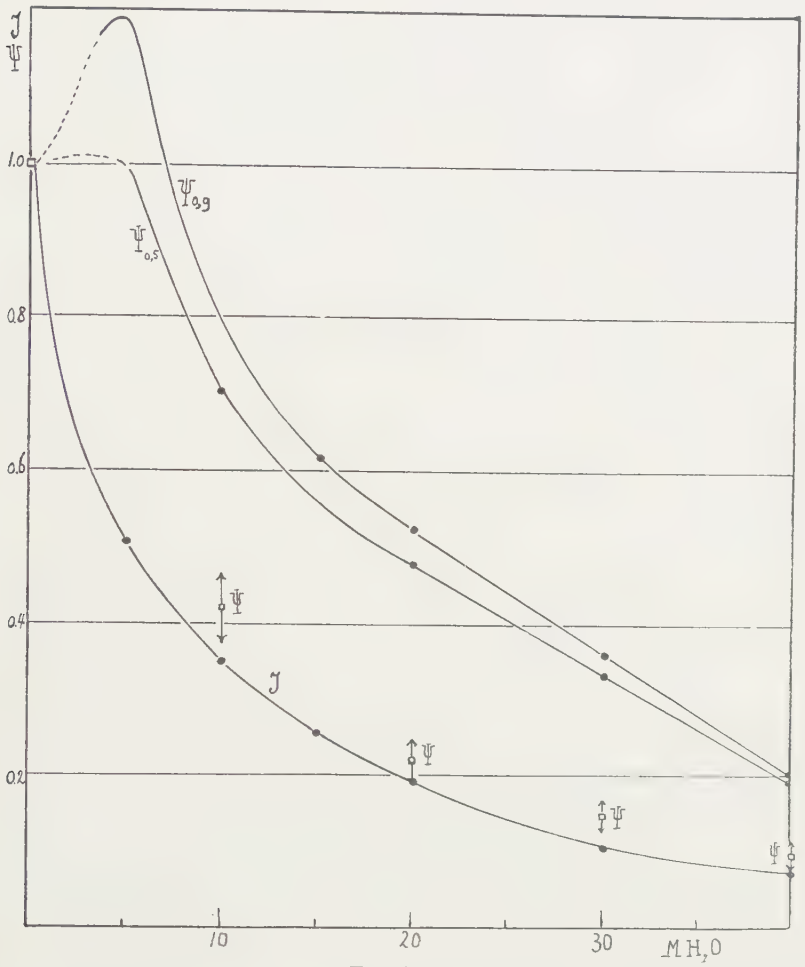


Fig. 1.

$\psi_{0,9}$ and $\psi_{0,5}$. The experimental data obtained with a system of counters (opening of the cone 30°) are only a little above the ionisationcurve, but far below those obtained by the ordinary GROSZ-reduction.

We write $\varphi(x)$ for $-x\dfrac{dI}{dx}$ and obtain, δ being the depth expressed in 10 m of water below the sealevel the following values for $\dfrac{dI}{dx}$ and, by graphical integration putting $\alpha\bar{k} = \beta t G K$, the integral of $\varphi\, d\ln k$

$\delta = 0$	0.5	1	1.5	2	3	4
$-\dfrac{dI}{dx} = 0$	0.492	0.235	0.151	0.114	0,065	0.026

$$\int_{\delta-0.5}^{\delta=x} \varphi(x) \frac{d\ln k}{dx} dx$$

δ \ η	0.95	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
1.0	0.489	0.429	0.324	0.262	0.213	0.167
1.5	0.677	0.580	0.436	0.348	0.281	0.219
2	0.773	0.656	0.492	0 392	0.315	0.244
2.5	0.835	0.704	0.526	0.418	0.336	0.260
3	0.877	0.735	0 547	0.434	0.349	0.269
3.5	0.905	0.753	0.561	0.441	0.357	0.275
4	0.921	0.762	0.563	0.450	0.361	0.278

From (7) we have:

$$\tau = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \frac{d\ln k}{dx} dx}{(p+1)\{\psi(x_2) - I(x_2) - \psi(x_1) + I(x_1)\} + \varphi(x_1) - \varphi(x_2)} \quad . \quad . \quad (8)$$

For small values of p the first term in the denominator will be almost negligible as the differences between ψ and I are very small as compared to $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ for small values of δ.

We find for $\eta > 0.7$ a proportionality between the values of the integral and the corresponding values of $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ the resulting lifetime being:

η	0.95	0.9	0.8	0.7	
τ_0	1.9	1.8	1.5	1.4	$\times 10^{-6}$ *sec*

This result is in complete accord with the value found from the deviation of the straight line in the *log I* —*log d* diagram. This time τ has been deduced without using a special energydistribution. The fact, that the first term in the denominator of (8) is negligible shows that the primary energy-distribution is nearly proportional to E^{-s} (see § 4, c).

Mathematics. — *Sur la capacité des ensembles.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

§ 1. La notion de capacité fut introduite par WIENER en 1924. Sa définition n'est valable que pour les ensembles bornés, fermés F. Il considère dans l'ensemble complémentaire de F l'ensemble ouvert Ω s'étendant vers l'infini. Si $v(P)$ signifie la solution de WIENER pour Ω et valeurs-frontière 1, et si S est une surface suffissamment régulière entourant F, on a

$$\text{cap. } F = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{\partial v}{\partial n}\, ds$$

(n = normale intérieure).

En 1932 M. DE LA VALLÉE POUSSIN donnait la définition suivante, valable pour ensembles bornés quelconques [1]):

La capacité d'un ensemble borné E est la borne supérieure des charges que l'ensemble peut soutenir sans que son potentiel surpasse l'unité.

Pour ensembles fermés la valeur qui résulte de cette définition est la même que celle résultant de la définition de WIENER.

Le but principal de cet article est de montrer que la définition de WIENER peut être généralisée pour ensembles bornés quelconques en conséquence d'une généralisation du problème de DIRICHLET.

Nous considérerons le cas d'un espace euclidien *à trois dimensions*; la généralisation aux espaces à plus de dimensions est immédiate.

§ 2. Soit E un ensemble borné quelconque et CE son complémentaire. Donnons sur la frontière de E les valeurs-frontière 1. Soit O un ensemble ouvert contenant E. Désignons par $v_f(P)$ la fonction harmonique dans le complémentaire (fermé) de O, correspondant aux valeurs-frontière 1 sur la frontière de O, c.a.d. la fonction appelée par M. BRELOT [2]) „la solution pour CO et valeurs-frontière 1".

Définition. L'enveloppe inférieure des solutions $v_f(P)$ pour tous les ensembles ouverts contenant E (donc borne inférieure en chaque point) sera appelée le potentiel capacitaire extérieur $\bar{v}(P)$ de E.

---

[1]) M. DE LA VALLÉE POUSSIN se bornait à des ensembles mesurables B, mais moyennant une définition plus précise de la notion de répartition de masse, la définition peut être rendue générale.

[2]) M. BRELOT, Problème de Dirichlet et Majorantes harmoniques. Bulletin des Sc. Math. t. LXIII (1939).

De même, si F désigne un ensemble fermé contenu dans E et $v_0(P)$ la solution de WIENER *pour CF à valeurs-frontière 1, l'enveloppe supérieure $\underline{v}(P)$ de ces solutions pour tous les ensembles fermés contenus dans E sera appelée le potentiel capacitaire intérieur de E.*

On voit que $\bar{v}(P) \geqq v(P)$. Pour les ensembles ouverts ou fermés on a $v(P) = \underline{v}(P)$.

Nous montrerons que les deux solutions sont harmoniques en tout point intérieur de CE; il suffit de démontrer cela pour $\bar{v}(P)$, la démonstration étant analogue pour $\underline{v}(P)$.

Soit P_0 un point intérieur de CE. Il est alors possible de construire une suite d'ensembles ouverts $\{O_k\}$, contenants E, telle que, si v_k désigne la solution pour CO_i.

$$\lim_{k \to \infty} v_k(P_0) = \bar{v}(P_0).$$

Puisque $v_i(P) \geqq v_j(P)$ si $O_i \subset O_j$ et $\bar{v}(P_0)$ est la borne inférieure de toutes les solutions en P_0, on peut arranger de telle sorte que la suite $\{O_k\}$ est décroissante (p. ex. on peut prendre la suite $\{O_1 . O_2 \ldots O_k\}$). Soit alors δ un voisinage de P_0, suffisamment petit et ne contenant que des points intérieurs de CE. Soit $\{P_k\}$ un ensemble partout dense dans $\delta (k = 1, 2, \ldots)$. A chaque P_k on peut donc faire correspondre une suite d'ensembles ouverts

$$O_{k1} \supset O_{k2} \supset \ldots .$$

telle que

$$\lim_{l \to \infty} v_{kl}(P_k) = \bar{v}(P_k).$$

D'ailleurs on voit comme ci-dessus qu'on peut supposer

$$O_{kl} \subset O_{k-1,l} \qquad (k = 2, 3, \ldots ; \ l = 1, 2, \ldots).$$

La suite $\{v_{ii}(P)\}$, correspondant à la suite décroissante $\{O_{ii}\}$, converge alors à $\bar{v}(P)$ en tout point P_k:

$$\lim_{i \to \infty} v_{ii}(P_k) = \bar{v}(P_k)$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Tous les v_{ii} étant harmoniques en δ, la suite décroissante $\{v_{ii}\}$ tend en δ vers une fonction harmonique $v^*(P)$ et on a

$$v^*(P_k) = \bar{v}(P_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Supposons ensuite qu'en un point P' de $\delta \neq P_i$ on ait

$$v^*(P') > \bar{v}(P').$$

Alors il existe un ensemble ouvert $O \supset E$ tel que, v étant la solution pour CO,

$$v^*(P') > v(P') > \bar{v}(P').$$

Considérons alors la suite $\{O.O_{kk}\} = \{O'_{kk}\}$. La suite des solutions correspondantes $\{v'_{kk}\}$ converge en décroissant vers une fonction harmonique $v^{*\prime}$ et puisque $v'_{kk} < v_{kk}$, on a encore

$$v^{*\prime}(P_i) = v(P_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions harmoniques v^* et $v^{*\prime}$ coïncident alors dans un ensemble partout dense sur δ, et on a donc

$$v^{*\prime}(P) = v^*(P) \,.\, (P \supset \delta).$$

Parce que $O.O_{kk} \subset O$ on a encore $v^{*\prime}(P) \leqq v(P)$ et donc aussi $v^{*\prime}(P') = v^*(P') \leqq v(P')$, en contradiction avec l'inégalité ci-dessus. On a donc bien

$$\bar{v}(P) = v^*(P),$$

et $\bar{v}$ est une fonction harmonique en taut point intérieur de CE.

Remarques.

1. Dans une communication précédente j'ai introduit la notion de „solution" pour un ensemble borné borélien quelconque [1]). On généralise facilement cette notion pour ensembles boréliens non bornés et alors, en remarquant que la fonction ainsi définie est indépendant de la suite des ensembles boréliens approximant l'ensemble donné, il est facile de montrer que:

1e si E est approximable par l'extérieur, la solution ainsi définie pour CE et valeurs-frontière 1 coïncide avec $\bar{v}(P)$;

2e si E est approximable par l'intérieur la solution pour CE et valeurs-frontière 1 coïncide avec $v(P)$.

2. Soit S une surface suffisamment régulière entourant E et soit n la normale intérieure. Si v_f désigne la solution pour CO $(O \supset E)$ on a $\frac{\partial v_f}{\partial n} \geqq \frac{\partial v}{\partial n}$ sur S et il résulte de la démonstration précédente que $\frac{\partial v}{\partial n}$ est en tout point de S la borne inférieure des valeurs de $\frac{\partial v_f}{\partial n}$ pour tous les O contenant E. Si v_o désigne la solution pour CF $(F \subset E)$ on a $\frac{\partial v_o}{\partial n} \leqq \frac{\partial v}{\partial n}$ sur S et $\frac{\partial v}{\partial n}$ est en tout point de S la borne supérieure des valeurs de $\frac{\partial v_o}{\partial n}$ pour tous les F contenus dans E.

3. Les potentiels capacitaires extérieurs et intérieurs sont égaux à 1 en tous les points intérieurs de CE qui n'appartiennent pas à l'ensemble connexe de CE s'étendant à l'infini.

---

[1]) A. F. MONNA, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 745—752 (1939).

§ 3. On sait que la capacité d'un ensemble borné quelconque E, définie selon M. DE LA VALLÉE POUSSIN, est la borne supérieure des capacités de tous les ensembles fermés contenus dans E. Aussi, si l'ensemble est fermé ou ouvert la capacité est la borne inférieure de celles de tous les ensembles ouverts contenant E (pour un ensemble ouvert la borne est atteinte par l'ensemble lui même) [1]. Cela posé, nous définirons les notions de „capacité extérieure" et „capacité intérieure".

Définition. La capacité intérieure $\underline{c}(E)$ d'un ensemble borné E est la borne supérieure des capacités de tous les sous-ensembles fermés de E.

La capacité extérieure $\overline{c}(E)$ de E est la borne inférieure des capacités de tous les ensembles ouverts contenant E.

D'après § 1 on a pour ensembles fermés

$$\overline{c}(F) = \underline{c}(F) = c(F) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int \frac{\partial v}{\partial n}\, ds$$

où v est la solution de WIENER pour CF et valeurs-frontière 1.

Un ensemble ouvert est la limite d'une suite croissante d'ensembles fermés et on voit alors que

$$\overline{c}(O) = \underline{c}(O) = c(O) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int \frac{\partial v}{\partial n}\, ds$$

où ici v signifie la solution pour l'ensemble fermé CO et valeurs-frontière 1 (BRELOT).

De ces deux formules il résultent immédiatement en conséquence des définitions et de la deuxième remarque du § 2, les formules générales:

$$\overline{c}(E) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int \frac{\partial v}{\partial n}\, ds,$$

$$\underline{c}(E) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int \frac{\partial v}{\partial n}\, ds.$$

§ 4. Enfin quelques propriétés simples de la capacité extérieure et intérieure.

1. On a toujours

$$\overline{c}(E) \geqq \underline{c}(E).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{c}(E) = \underline{c}(E)$ est qu'on puisse trouver pour tout $\varepsilon > 0$ deux ensembles O et F, ouvert et fermé, tels qu'on ait

$$O \supset E \supset F$$
$$c(O) - c(F) < \varepsilon,$$

[1] Voir p. ex. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Les nouvelles méthodes de la théorie du potential etc. Act. Sc. et industr. 578 (1937).

on encore que

$$\bar{v}(P) = \underline{v}(P) \qquad (P \subset CE).$$

Remarquons qu'il n'est pas permis de remplacer, comme dans la théorie de la mesure, $c(O) - c(F)$ par $c(O - F)$, ces deux quantités n'étant pas égales ici en général.

2. Si $E_1 \supset E_2$ on a

$$\bar{c}(E_1) \geqq \bar{c}(E_2),$$
$$\underline{c}(E_1) \geqq \underline{c}(E_2).$$

3. Soit $E = E_1 + E_2 + \ldots$ où les E_i sont mesurable B. M. FROSTMAN a montré [1]) qu'alors

$$c(E) \leqq \underline{c}(E_1) + \underline{c}(E_2) + \ldots.$$

Cette relation est encore vraie pour la capacité extérieure. En effet, soit $O_i \supset E_i$ et donc $E \subset \sum_i O_i$. Alors, $\sum O_i$ étant ouvert

$$\bar{c}(E) \leqq \bar{c}(\Sigma O_i) = \underline{c}(\Sigma O_i) \leqq \underline{c}(O_1) + \underline{c}(O_2) + \ldots$$
$$= \bar{c}(O_1) + \bar{c}(O_2) + \ldots.$$

Donc, en prenant les bornes inférieures,

$$c(E) \leqq c(E_1) + \bar{c}(E_2) + \ldots.$$

Remarque. On peut de même façon qu'au § 3 définir les capacités extérieures et intérieures d'ordre $\alpha \geqq 1$ (c.a.d. des capacités obtenues en partant non du potentiel newtonien mais d'un potentiel généralisé $\frac{1}{r^\alpha}$; voir FROSTMAN l.c.). La propriété ci-dessus devient alors

$$[\bar{c}(E)]^\alpha \leqq [c(E_1)]^\alpha + [\bar{c}(E_2)]^\alpha + \ldots.$$

4. Si d_p désigne la plus petite distance de P à E on a

$$\bar{v}(P) \leqq \frac{\bar{c}(E)}{d_p}$$

$$\underline{v}(P) \leqq \frac{\underline{c}(E)}{d_p}.$$

Ces relations sont connues pour ensembles fermés (elles se réduisent alors à *une* inégalité). On voit par un passage à la limite qu'elles subsistent pour ensembles ouverts (encore *une* inégalité) et alors elles subsistent encore au cas général.

---

[1]) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Bd. **3** (Lund 1935).

5. Les ensembles de capacité nulle sont particulièrement intéressants. On a les propriétés suivantes.

a. Soit E la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité intérieure ou extérieure nulle. Alors, comme il résulte de la propriété no. 3 du paragraphe précédent, $\underline{c}(E)$ ou bien $\overline{c}(E)$ est zéro.

b. Un ensemble de capacité extérieure nulle a une mesure extérieure m_e nulle et est donc mesurable.

Supposons $m_e > 0$ et soit O un ensemble ouvert de mesure m, contenant E. Considérons sur O une distribution de masse telle que chaque sous-ensemble mesurable de O porte une masse égale à la mesure de cet sous-ensemble. Le potentiel de cette distribution est borné:

$$\iiint \frac{dm}{r} \leqq 2\pi \left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = M_O.$$

On a donc en vertu de la définition de M. DE LA VALLÉE POUSSIN

$$c(O) \geqq \frac{m}{M_O}.$$

Par passage à la limite donc

$$c(E) \geqq \frac{m_e}{M} > 0,$$

où

$$M = 2\pi \left(\frac{3m_e}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Egalement il résulte de $\underline{c}(E) = 0$ que $m_i(E) = 0$ (voir DE LA VALLÉE POUSSIN l.c. p. 21; aussi FROSTMAN l.c. ch. VII).

Dordrecht, décembre 1939.

Mathematics. — *Sur les notions de „point stable" et „point régulier" dans le problème de* DIRICHLET. Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. v. d. WOUDE).

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Dans une communication précédente[1]) j'ai donné les définitions des notions „point-frontière stable" et „point-frontière régulier" d'un ensemble borné mesurable B. Il s'agit maintenant d'une généralisation des critères de stabilité et régularité donnés par M. M. WIENER et BRELOT[2]). Nous supprimons la plupart des démonstrations parce qu'on trouve facilement les modifications nécessaires dans les épreuves bien connues aux cas d'un ensemble ouvert ou fermé.

Théorème 1. *Pour que Q soit stable il faut et il suffit que pour une fonction continue $\Phi(P)$, sous-harmonique dans un ensemble ouvert contenant E, nulle en Q et >0 ailleurs, on ait $u(Q)=\Phi(Q)$ (on peut prendre p. ex. $\Phi(P)=\overline{PQ}$).*

Critère analogue pour la régularité. C'est une conséquence de ce critère que la stabilité et la régularité sont conservées quand l'ensemble donné E décroît, Q restant point-frontière. Il en résultent encore les deux théorèmes de comparaisons suivants:

a. Soit E contenu dans un ensemble ouvert Ω, sauf un seul point Q_0 des frontières de E et Ω qui appartient à E mais non à Ω. Soit de plus Q un point-frontière régulier pour Ω. Alors Q est stable pour E. La démonstration est tout à fait analogue à celle de M. BRELOT pour le cas de E fermé (les circonstances que E et Ω peuvent avoir de points-frontière en commun autre que Q_0 — ces points n'appartiennent alors pas à E — et que E éventuellement n'est approximable que par l'intérieur, ne présentent pas de difficultés). Remarquons que l'inverse n'a pas toujours lieu.

b. Soit $E_2 \subset E_1$, le point-frontière Q de E_1 et E_2 appartenant à E_1 mais non à E_2. Alors la stabilité de Q pour E_1 entraîne la régularité pour E_2. La démonstration est immédiate (toute solution est continue en un point stable).

De ce dernier critère il résulte la propriété-suivante:

Soit E la fermeture de E (c.a.d. la somme de E et les points-frontière

---

[1]) A. F. MONNA, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 745—752 (1939).

[2]) M. BRELOT, Probléme de Dirichlet et majorantes harmoniques. Bull, des Sc. Math. t. LXIII (1939).

de E). Alors chaque point stable de $\bar{E}$ est stable ou régulier pour E selon que Q appartienne à E ou non. Néanmoins, un point régulier ou stable pour E peut être instable pour E. L'ensemble e_{sr} des points réguliers et des points stables pour E contient donc l'ensemble des points stables pour $\bar{E}$. Or, M. BRELOT a montré [1]) que ce dernier ensemble est partout dense sur la frontière de $\bar{E}$. Donc aussi e_{sr} est partout dense sur la frontière de E.

Théorème 2. *Soit σ une sphère de centre Q et de rayon ϱ. Soit $(CE)_\varrho$ l'ensemble des points de CE situés sur ou dans σ et supposons ϱ suffisamment petit pour que E soit situé dans l'ensemble connexe infini déterminé par $(CE)_\varrho$. Pour la régularité de Q il faut et il suffit alors que*

1°. *Si E est approximable par l'intérieur (donc $(CE)_\varrho$ par l'extérieur):*

$$\lim_{P \to Q} \bar{v}(P) = 1$$
$$(P \supset E)$$

2°. *Si E est approximable par l'extérieur (donc $(CE)_\varrho$ par l'intérieur):*

$$\lim_{P \to Q^-} \underline{v}(P) = 1$$
$$(P \supset E)$$

ou $\bar{v}$ resp. $\underline{v}$ signifient le potentiel capacitaire extérieur et intérieur de $(CE)_\varrho$ [2]).

Critère analogue pour la stabilité.

La nécessité est une conséquence immédiate du caractère local de la stabilité ou régularité d'un point-frontière (voir aussi la première remarque du § 2 de l'article mentionné ci-dessus).

La suffisance s'établit d'une façon analogue à la démonstration du critère bien connu de BOULIGAND pour ensembles ouverts [3]). D'abord on voit qu'il suffit de considérer une fonction continue Φ sur la frontière E^* de E qui est zéro sur la portion E^*_ϱ de E^* située sur ou dans une sphère σ_ϱ de centre Q et rayon ϱ suffisamment petit et qui est $\leqq 1$ ailleurs sur E^*. La borne inférieure de $w = 1 - \bar{v}(P)$ (resp. $1 - \underline{v}(P)$) est peut-être zéro sur $E^* - E^*_\varrho$, mais il est possible d'éliminer de $E^* - E^*_\varrho$ une portion de mesure δ aussi petite que l'on veut telle que $w > m > 0$ sur la portion restante. Soit alors $\theta(P)$ la solution pour $E + \sigma_\varrho$ et valeurs-frontière 1 sur δ et zéro ailleurs (rendre continue). Alors les valeurs de Φ sont au plus égales sur E^* à celles correspondants à $\frac{w}{m} + \theta$. Remarquons que la

---

[1]) M. BRELOT, Sur un balayage d'ensembles fermés. C. R. Ac. des Sc. t. 207, 1157 (1938).

[2]) Voir l'article précédent: Sur la capacité des ensembles.

[3]) Annales de la Soc. pol. de Math., 1925, p. 89.

valeur de θ en Q peut être rendue aussi petite que l'on veut avec δ et ε. Il suffit alors évidemment de montrer que la solution pour Φ est majorée par $w(P)$ car, d'après la supposition, $w(P)$ tend vers zéro en Q. Or, on montre sans peine par induction que de $\Phi(P) \leqq w(P)$ sur $E + E^*$ il résulte que la solution pour Φ est majorée par $w(P)$. Le théorème est donc démontré.

Pour ensembles fermés M. BRELOT a déjà généralisé le critère nécessaire et suffisant de WIENER (série de WIENER) pour ensembles ouverts. Au cas génèral d'un ensemble borélien on obtient le critère suivant:

Théorème 3. *Soit Γ_n la sphère de centre Q_0 et rayon λ^n où $0 < \lambda < 1$. Soit A_n la portion du complémentaire de E comprise au sens large entre les sphères Γ_n et Γ_{n-1} et soient $\bar{c}_n$ et c_n les capacités extérieures et intérieures de A_n. Pour que Q_0 soit stable ou régulier (selon que Q_0 appartienne à E ou non) il faut et suffit que,*

1°. *si E est approximable par l'intérieur, la série*

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{\bar{\lambda}^n}$$

diverge;

2°. *si E est approximable par l'extérieur, la série*

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{\bar{\lambda}^n}$$

diverge.

Supposons (en prenant le premier cas) que la série indiquée converge et supposons, par impossible, que Q_0 soit régulier. Choisissons m assez grand pour que $\sum_m^\infty \frac{\bar{c}_n}{\bar{\lambda}^n} < \frac{\lambda}{4}$. En vertu du théorème 2 le potentiel capacitaire extérieur de la portion du complémentaire de E située sur ou dans Γ_{m+p} $(p = 0, 1, \ldots)$ tend vers 1 en Q_0. Il en résulte qu'on peut prendre k assez grand pour que le potentiel capacitaire extérieur $v_{m,m+k}$ de $A_m + \ldots + A_{m+k}$ soit supérieur à $\frac{1}{2}$ dans un voisinage de Q_0. Remarquons alors que si $E = E_1 + E_2$, on a, comme on le voit aisément,

$$\bar{v}_E(P) \leqq \bar{v}_{E_1}(P) + \bar{v}_{E_2}(P)$$

et

$$\underline{v}_E(P) \leqq \underline{v}_{E_1}(P) + \underline{v}_{E_2}(P).$$

Si donc v_n désigne le potentiel capacitaire extérieur de A_n, on a

$$\bar{v}_{m,m+k} \leqq \sum_m^{m+k} \bar{v}_n$$

et donc, en appliquant une relation connue (voir § 4 de la communication précédente), on a en Q_0

$$v_{m,m+k} \leqq \sum_{m}^{m+k} \frac{\bar{c}_n}{\lambda^{n+1}} < \frac{1}{4}.$$

C'est là une contradiction et le point est donc irrégulier (resp. instable)[1]).

Supposons ensuite que la série diverge et soit E approximable par l'extérieur. Choisissons les $\varepsilon_n > 0$ de manière que la série $\Sigma \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n}$ converge. Il existe alors dans chaque A_n un sous-ensemble B_n tel que

$$c_n - c(B_n) < \varepsilon_n.$$

La somme des ensembles B_n augmentée de Q est fermée. L'ensemble complémentaire ouvert Ω contient E, sauf éventuellement le point Q_0 si Q appartient à E (E et Ω peuvent avoir en commun d'autres points-frontière mais ces points certainement n'appartiennent pas à E). En conséquence du choix des B_n la série correspondante pour Ω diverge encore et Q est donc régulier pour Ω. D'après le théorème de comparaison précédent, Q est donc stable (ou régulier) pour E.

La même démonstration, dûe à M. BRELOT pour ensembles ouverts, subsiste évidemment encore au cas d'un ensemble borélien approximable par l'intérieur si l'on suppose que la série $\Sigma \frac{c_n}{\lambda^n}$ diverge. Cependant, en ce cas le théorème ne suppose que la divergence de la série des capacités extérieures ce qui n'entraîne pas la divergence de la série des capacités intérieures (au moins si l'on ne suppose pas que $c_n = c_n$). Pour montrer la suffisance du critère au cas d'un ensemble approximable par l'intérieur il faut donc d'autres moyens. Nous supprimons l'épreuve puisqu'on n'a qu' à modifier la démonstration de KELLOGG (l.c.) comme ci-dessus[2]).

Dordrecht, décembre 1939.

---

[1]) Cette démonstration n'est qu'une transposition de celle de KELLOGG pour ensembles ouverts; voir Bull. of the American Math. Soc. XXXII (1926).

[2]) Comparez aussi une démonstration de M. DE LA VALLÉE POUSSIN au Bulletin de l'Académie royale de Belgique 1938, p. 673.

Mathematics. — *Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume.* Von J. HAANTJES. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

In einer früheren Arbeit [1]) haben wir die folgenden zwei Sätze bewiesen:

1. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine* $V_n (n = 2m)$ *gerader Dimension konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe der* RIEMANN*schen Krümmungsmasse für jedes System von m gegenseitig senkrechten 2-Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieses Systems unabhängig ist.*

2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine* V_{2m} *konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe der skalaren Krümmungen von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten m-Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieser m-Richtungen unabhängig ist.*

Diese zwei geometrischen Charakterisierungen der konformeuklidischen Räume gerader Dimension sind eine Folge eines allgemeineren Satzes, den wir jetzt formulieren. Es seien $m_1, \ldots, m_p$ p beliebige aber fest gewählte Zahlen, für die

$$m_i > 1 \ (i = 1, \ldots, p); \ \sum_{i=1}^{p} m_i = n \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

ist, wo n die Dimension des Raumes ist. Wir betrachten weiter Systeme von p gegenseitig senkrechten m-Richtungen der Dimensionen $m_1, m_2, \ldots, m_p$; also eine m_1-Richtung, eine m_2-Richtung, ... und eine m_p-Richtung, welche gegenseitig senkrecht sind. Es handelt sich nun um den folgenden Satz:

3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine* $V_n (n \geqq 4)$ *konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe*

$$m_1 \varkappa_1 + m_2 \varkappa_2 + \ldots + m_p \varkappa_p \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

für jedes System von $p \ (p > 1)$ *gegenseitig senkrechten m-Richtungen der Dimensionen* $m_1, \ldots, m_p (m_i > 1)$ *in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieses Systems unabhängig ist.*

Dabei haben wir die skalare Krümmung [1]) (auch erzwungene skalare Krümmung genannt [2])) der m_i-Richtung mit $\varkappa_i$ bezeichnet. Im Folgenden

[1]) J. HAANTJES und W. WRONA, Ueber konformeuklidische und EINSTEINsche Räume gerader Dimension. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 626—636 (1939).

[2]) J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, S. 133.

wird sich herausstellen, dass in diesem Falle die Summe (2) stets gleich $n\varkappa$ ist, wo $\varkappa$ die skalare Krümmung der V_n ist. Für $m_i = 2\,(i = 1, \ldots, p)$ erhält man den ersten der oben genannten Sätze, für $p = 2$ und $m_1 = m_2$ den zweiten Satz.

Zuerst werden wir beweisen, dass in konformeuklidischen Räumen (C_n) die Summe (2) stets gleich $n\varkappa$ ist. In einer C_n hat der Krümmungsaffinor die Gestalt

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{4}{n-2}\, a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo

$$L_{\lambda\varkappa} = -K_{\lambda\varkappa} + \frac{1}{2\,(n-1)}\, K a_{\lambda\varkappa};\; L = L_{\lambda\varkappa}\, a^{\lambda\varkappa} = \frac{2-n}{2\,(n-1)}\, K \quad . \quad . \quad (4)$$

ist und der Fundamentaltensor des Raumes mit $a_{\lambda\varkappa}$ bezeichnet ist. Den Fundamentaltensor der m_i-Richtung bezeichnen wir mit $\underset{i}{a}_{\lambda\varkappa}$. Laut Definition ist nun

$$\left.\begin{aligned} m_1 \varkappa_1 &= \frac{1}{m_1 - 1}\, K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, \underset{1}{a}^{\nu\varkappa}\, \underset{1}{a}^{\mu\lambda} \\ &= \frac{1}{m_1 - 1} \cdot \frac{1}{n-2}\, (a_{\nu\lambda} L_{\mu\varkappa} - a_{\mu\lambda} L_{\nu\varkappa} - a_{\nu\varkappa} L_{\mu\lambda} + a_{\mu\varkappa} L_{\nu\lambda})\, \underset{1}{a}^{\nu\varkappa}\, \underset{1}{a}^{\mu\lambda} \\ &= \frac{-2}{n-2}\, L_{\mu\varkappa}\, \underset{1}{a}^{\mu\varkappa}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} m_1 \varkappa_1 + m_2 \varkappa_2 + \ldots + m_p \varkappa_p &= \frac{-2}{n-2}\, L_{\mu\varkappa} (\underset{1}{a}^{\mu\varkappa} + \ldots + \underset{p}{a}^{\mu\varkappa}) \\ &= \frac{-2}{n-2}\, L_{\mu\varkappa}\, a^{\mu\varkappa} = \frac{1}{n-1}\, K = n\varkappa, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

wo $\varkappa$ die skalare Krümmung der C_n ist. Die Summe (2) ist daher in einer C_n von der besonderen Wahl des Systems von m_i-Richtungen unabhängig.

Jetzt beweisen wir den umgekehrten Satz. Die Summe (2) sei für eine bestimmte Wahl von $m_i\,(i = 1, \ldots, p)$ von der besonderen Wahl der gegenseitig senkrechten m_i-Richtungen unabhängig. Es ist zu beweisen, dass der Raum konformeuklidisch ist.

Betrachten wir zuerst den Fall $p = 2$. Den Fundamentaltensor der

m_1-Richtung bzw. m_2-Richtung bezeichnen wir mit $a'_{\lambda\varkappa}$ bzw. $a''_{\lambda\varkappa}$. Es ist dann wegen $a''_{\lambda\varkappa} = a_{\lambda\varkappa} - a'_{\lambda\varkappa}$

$$\left.\begin{aligned} m_1 \varkappa_1 + m_2 \varkappa_2 &= \frac{1}{m_1-1} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda} + \frac{1}{m_2-1} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a''^{\nu\varkappa} a''^{\mu\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{m_1-1} + \frac{1}{m_2-1}\right) K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda} + \frac{1}{m_2-1} (K - 2 K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{m_2-1}\left(K - 2 K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + \frac{n-2}{m_1-1} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

von der besonderen Wahl der m_1-Richtung unabhängig. Der Ausdruck im rechten Glied dieser Gleichung ist also von der besonderen Wahl von $a'_{\mu\lambda}$ unabhängig. Betrachten wir jetzt zwei m_1-Richtungen, welche eine (m_1-1)-Richtung gemeinsam haben.

Die Fundamentaltensoren bezeichnen wir mit

$$\left.\begin{aligned} a'_{\varkappa\lambda} &= b_{\varkappa\lambda} + \underset{p}{\varepsilon}\, p_\varkappa p_\lambda, \qquad \underset{p}{\varepsilon} = p^\varkappa p_\varkappa, \\ \tilde{a}'_{\varkappa\lambda} &= b_{\varkappa\lambda} + \underset{q}{\varepsilon}\, q_\varkappa q_\lambda, \qquad \underset{q}{\varepsilon} = q^\varkappa q_\varkappa, \qquad p^\varkappa \perp q^\varkappa, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo $b_{\lambda\varkappa}$ der Fundamentaltensor der gemeinsamen (m_1-1)-Richtung ist und $p^\varkappa$ und $q^\varkappa$ zu dieser (m_1-1)-Richtung senkrecht sind. Der Ausdruk (7) hat für $a'_{\lambda\varkappa}$ und $\tilde{a}'_{\lambda\varkappa}$ den selben Wert. Subtraktion führt zu

$$\left.\begin{aligned} -\underset{p}{\varepsilon}\, K_{\mu\lambda} p^\mu p^\lambda + \frac{2(n-2)}{m_1-1} \underset{p}{\varepsilon}\, K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} p^\mu p^\lambda &= \\ = -\underset{q}{\varepsilon}\, K_{\mu\lambda} q^\mu q^\lambda + \frac{2(n-2)}{m_1-1} \underset{q}{\varepsilon}\, K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} q^\mu q^\lambda & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In dieser Gleichung ist $b_{\lambda\varkappa}$ der Fundamentaltensor einer beliebigen (m_1-1)-Richtung und sind $p^\varkappa$ und $q^\varkappa$ beliebige zu dieser (m_1-1)-Richtung senkrechte Einheitsvektoren, welche auch gegenseitig senkrecht sind.

Wir wenden jetzt den folgenden Satz an:

Genügt ein Affinor $P_{\lambda\varkappa}$ der Gleichung

$$\underset{p}{\varepsilon}\, P_{\lambda\varkappa} p^\lambda p^\varkappa = \underset{q}{\varepsilon}\, P_{\lambda\varkappa} q^\lambda q^\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

für jedes Paar von zwei gegenseitig senkrechten Einheitsvektoren $p^\varkappa$ und $q^\varkappa$, welche in einer bestimmten m-Richtung gelegen sind, so ist die m-Komponente von $P_{(\lambda\varkappa)}$ (in dieser m-Richtung) proportional mit dem Fundamentaltensor dieser m-Richtung. Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die mit $P_{(\lambda\varkappa)}$ gemessene Länge der in der m-Richtung

liegenden Vektoren proportional ist mit der mit $a_{\lambda\varkappa}$ gemessenen Länge. Aus (10) geht also hervor

$$P_{(\lambda\varkappa)}\, p^{\lambda}\, q^{\varkappa} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

für jedes Paar gegenseitig senkrechte Vektoren der genannten m-Richtung.

Unter Anwendung dieses Satzes folgt daher aus (9), dass

$$-K_{\mu\lambda}\, p^{\mu}\, q^{\lambda} + \frac{2\,(n-2)}{m_1 - 1} K_{\nu(\mu\lambda)\varkappa}\, b^{\nu\varkappa}\, p^{\mu}\, q^{\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ist, wo p' und q' gegenseitig senkrecht sind. Diese Gleichung kann man nun für verschiedene b'^{λ} anschreiben, wobei p' und q' fest bleiben. Wir wählen dazu zwei (m_1-1)-Richtungen, welche eine (m_1-2)-Richtung gemeinsam haben und beide zu p' und q' senkrecht sind. Es seien

$$\left.\begin{aligned} b^{\varkappa\lambda} &= c^{\varkappa\lambda} + \underset{r}{\varepsilon}\, r^{\varkappa}\, r^{\lambda} \\ \tilde{b}^{\varkappa\lambda} &= c^{\varkappa\lambda} + \underset{s}{\varepsilon}\, s^{\varkappa}\, s^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die Fundamentaltensoren dieser (m_1-1)-Richtungen. Die Gleichung (12) gilt nun sowohl für b'^{λ} als $\tilde{b}'^{\lambda}$. Es ergibt sich dann durch Subtraktion dieser zwei Gleichungen in ähnlicher Weise wie oben

$$K_{\nu(\mu\lambda)\varkappa}\, p^{\mu}\, q^{\lambda}\, r^{\nu}\, s^{\varkappa} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

welche Gleichung also für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Vektoren gilt.

Im Falle wo $p > 2$ ist, beweist man in genau derselben Weise, dass (14) gilt für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Vektoren, welche in einer $(m_1 + m_2)$-Richtung gelegen sind. Bei diesem Beweis werden dann die m_i-Richtungen $(i = 3, \ldots, p)$ fest gehalten, während die m_1-Richtung und die m_2-Richtung innerhalb der $(m_1 + m_2)$-Richtung variiert werden wie oben angegeben ist. Weil nun aber die m_1-Richtung und die m_2-Richtung beliebig gewählt werden können, gilt (14) für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Vektoren.

Aus (14) geht durch Verwechslung von $q^{\varkappa}$ und $s^{\varkappa}$ hervor

$$-K_{\nu(\mu\varkappa)\lambda}\, p^{\mu}\, q^{\lambda}\, r^{\nu}\, s^{\varkappa} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Addition dieser zwei Gleichungen ergibt wegen $K_{[\nu\mu\lambda]\varkappa} = 0$

$$3\, K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, p^{\mu}\, q^{\lambda}\, r^{\nu}\, s^{\varkappa} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Es verschwinden also für jedes orthogonale Bezugssystem die Bestimmungszahlen von $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ mit vier ungleichen Indizes. Die V_n ist demzufolge konformeuklidisch [3]), also eine C_n. Damit ist der oben genannte Satz bewiesen.

---

[3]) Vgl. J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK II, S. 204.

Palæontology. — *The excavation at Koerhuisbeek, Deventer, Netherlands. 1935—1937.* Cadastre: C. 2, Ns 632—640. By J. BUTTER. (Communicated by Prof. J. BOEKE.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

In 1935 Ir L. VAN GENDT, the Director of Public Works, being in need of sand for making a sportsground, began excavations at Deventer. The digging extended from about $5\frac{1}{2}$ m above sea-level to $2\frac{1}{2}$ m below sea-level.

The moraine of Risz is at about 74 m—N.A.P.

The excavation extended (cp. geological service, map 33, Zutphen II) from holocene (I z) to pleistocene II 8 (lower terrace of Wurm; horizontal sands without gravel).

The first thing found (at abt. 0.67 m + N.A.P.) was a kind of paddle or side rudder, made of wood and was presented to the Waagmuseum.

In the excavation were 4 layers of gravel and 2 layers of clay.

Layer IV was at 2.50—2.75 m—N.A.P. In this gravel have been found bones of Elephas primigenius (tusk, molars, humerus) Rhinoceros tichorhinus (jaw with 2 molars), Cervus megaceros (part of the skull; here the right antler has been struck off) (Cp. Antiquity March 1938 BREUIL. The use of bone implements in the old palaeolithic period Chou—kou—tien 6). Bos primigenius, the smaller type (Atlas) Rangifer tarandus, Cervus Elaphus (antlers and part of skull) Sus scrofa (a tooth).

The gravel of IV was very course: 33 % white quartz (5.6 kg greyish gravel and 2.8 kg white quartz) (Cp. 5A at Helenaveen and Montferland (STEENHUIS).

Dr KRUISINGA, Delft, has determinated: sandstone, probably from the south; porphyr, probably from the Rhine; sandstone from the south; quartz porphyr, perhaps from the Rhine; jurassic oölite from the south. (Cp. the terraces of the Rhine and Ubagsberg). Three pebbles of the north: 2 granites and 1 biotitegranite. Dimensions $1 \times 2 \times 3$ cm, but also many greater pieces: K 771, weight 4 kg, $27 \times 12 \times 7$ cm.

Layer III from 0.5 m to — 2 m below sea-level. The gravel had much smaller dimensions: $1.5 \times 1.5 \times 1$ cm; $4 \times 3 \times 0.3$ cm.

Under this layer III was a small layer of brown sand with many pupillas; the brown sand was covering a thin layer of greyish blue sand without this shell.

In these two layers was skull 1, which has been washed by the workmen; so the contents are not available for examination. Prof. Dr EUG. DUBOIS has preparaed the skull. Above layer III were clausilias.

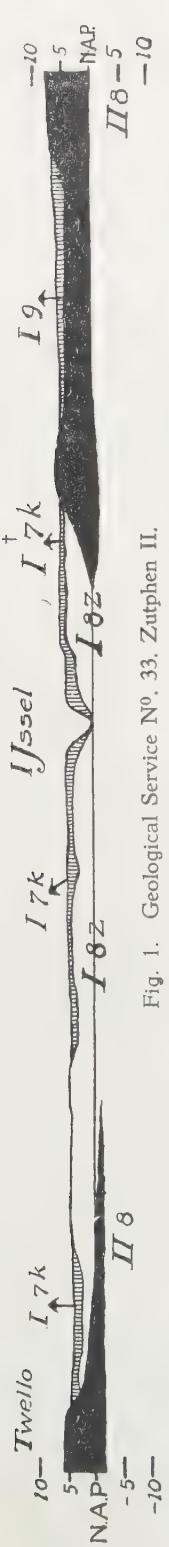


Fig. 1. Geological Service Nº. 33. Zutphen II.

Under layer III was a third skull (K 902), half a meter from a piece of willow and 8 m from the tusk of mammoth, at a depth of abt —2.5 m. This skull was completely filled up and is at the disposal of scientific research (e.g. Prof. Dr EDELMAN, Wageningen).

A part of the 2nd skull (K 887) has probably been found in a pothole. Layer II was locally covered by a layer of clay (in the south of the excavation at 0.25 m + N.A.P.) going from the north to the south at a breadth of about 20 m and at a thickness of 2—4 dm. This layer of clay had at the south an inclination of 1 : 10. Between II and III have been found:

1. More than 2000 bones of Bos (very much), Equus (much) Cervus; (nearly 300 have been determinated later on by Prof. Dr G. HASSE, Antwerp.)

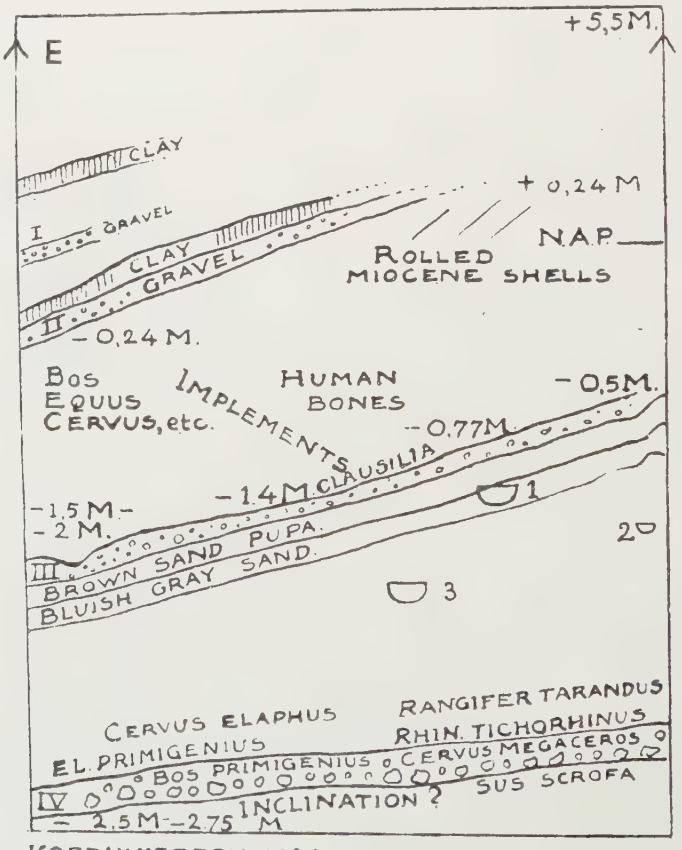


Fig. 2.

At the top a lacustrine deposit. At the right a pothole.

2. Human long bones: Radius, Ulna (curved) humerus, femur.
   Tibia (less platycnemic than those of Cro-magnon)
   sacrum, parts of skull.
   All the bones have been measured and described by Prof. Dr H. V. VALLOIS, Paris-Toulouse. We hope, war will end soon.
3. 4 Implements, made from horn of Cervus elaphus.
   K 1682 hammer-axe 0.5 m—N.A.P.
   K 1022 Point 0.24 m—N.A.P.
   K 1214 Horn, cut off 2 m—N.A.P.
   K 1444 Horn, cut off 0.77 m—N.A.P.
4. Miocene rolled shells, coming from the south.
5. At N.A.P. I have found a small inclusion of botanic remains, in which Dr FLORSCHÜTZ, Velp, discovered grains of raisins; in Swiss these occur in the neolithicum.

The 4 implements:

K 1682. Hammer, axe or hoe. The hole is perpendicular.

In St. Germain-en-Laye is quite the same hammer-axe in the room of neolithicum; nr 3204 St. Aubin, lake of Neuchâtel, Swiss, Cp. also Clark Svaerdborg, fig. 40—1 and Svaerdborg X 4625 and X 4614.

Cut off transversely.

K 1022. Cp. with Svaerdborg. There the pieces of antlers are cut off, but they have no hole. Cp. also Clark, fig. 55, 2 Ertebölle and Clark Mildenhall Fen (1936). In the room of the neolithicum at St. Germain-en-Laye is nr 18998, found in the peat, Abbéville, Somme (Donor Bouchez de Perthes). This specimen has also a round hole.

Compare for the probable use of it: Déchelette I, fig. 191, nr 4. La Lance, Swiss. In that country we find also points in the neolithicum; never the hole is round, but oblong, to contain a small neolithic axe as a specimen in the Museum Arnhem. I have made a cast of the interior of the hole of K 1022, to see if it were possible to compare this hole with the implement of Illustrated London News. December 1929, nr 53. I got the impression that it could have contained such a thin, small flint.

But in the same room of neolithicum was also nr 23385, Latringen (Swiss neolithic palafittes) containing a small, thin flint, *polished* only on the edge, and the *round* hole filled up with some filling. So conclusions are not possible.

Moreover nr 53 is a *bone*, containing a flint and not a Cervus elaphus implement.

K 1214. Our specimen has not been finished, but cut off at one end, broken at the other. Cp. Svaerdborg X 512, but this horn has a round hole. Svaerdborg X 3955 has also a hole for a haft.

In Ertebölle are also specimens cut off as K 1214.

Cp. Clark fig. 40, nr 3 Svaerdborg and Déchelette I, fig. 191, nr 2 for

FIG. 3. PRAEHISTORIC CULTURES IN EUROPE AND THE EXCAVATIONS OF DEVENTER.

NORTHERN EUROPE			ANDERNACH			DEVENTER	
Climate phases	Culture	Fauna	Climate		Culture		Culture
			Subatlantic			Clay ? Gravel I ?	
Subboreal	Neolithic		Subboreal	Clay	Neolithic	Clay ? Gravel II ?	Neolithic
Atlantic, moist	Mesolithic: Kökkenmöddinger; Ertebölle III	Reindeer absent	Atlantic	Sand	Kökkenmöddinger	Sand	Implements Human long bones, curved, platycnemic
Boreal, dry	Mesolithic: Holmgaard Svaerdborg Mullerup Maglemose II	Reindeer survived	Boreal	pumice stone layer of gravel	Tardenoisian II. Maglemose.	Gravel III Sand with pupa Reindeer absent	Skull 1 and 1a
Preboreal	Lyngby I	Fauna of the tundra and forest	Reindeer disappears Subarctic	Clay Sand	Lyngby. Tardenoisian I.	Greyish sand with clay Sand	Skull 3 (with salix)
Subarctic Arctic	Paleolithic	Fauna of the tundra and the steppe	Mammoth becomes extinct Arctic	layer of gravel	Paleolithic	Mammoth becomes extinct Gravel IV	C. megaceros worked

the probable use of such implements and Kostrzewski fig. 5 nr 1. It may also be an upper part of a broken axe (recently found at Zandweert).

K 1444. Horn of a young Cervus Elaphus, cut off longitudinally as many times is the case with the axes in Ertebölle.

X 553 Svaerdborg has an oval hole. In "En Boplands pa de oldste stenalder in Svaerdborgmose 1919" Mr K. TRIIS JOHANSEN has published such a specimen as a forgery.

The culture of Cervus Elaphus begins in Mas d'Azyl, when the reindeer disappears. In Andernach, an excellent station for the study of terraces, that I have visited in 1933 with Professor Dr K. OESTREICH, the pumice stone eruption covers a layer with nearly all Cervus Elaphus-remains (and a kind of hamster) and below this layer is the magdalenian culture with the pleistocene fauna.

In the North of Europe it is quite the same. The Cervus Elaphus culture begins, when the reindeer is disappearing: (Hamburg, Lyngby) Maglemose, Mullerup, Svaerdborg, Holmegaard, Ertebölle, Kökkenmöddinger[1]).

It may be, that the climate of the periglacial countries was in the Wurmperiod uniform; but at the end of the Wurmperiod the reindeer disappeared earlier in the South of France, than in N.W. Europe, till it survived in North Russia.

So we can understand, that Prof. ABBÉ BREUIL said on the Congress of Oslo that the Hamburg-culture is a kind of magdalenian, coming from the east, (in which probably the maglemoseculture has its origin), but that this culture has nothing to do with the magdalenian of the South of France, and we can read in the "Subdivisions" (pag. 57) that the harpoon in this culture is: "de style déjà maglémosien".

We do not know, where at Deventer the neolithicum begins and the mesolithicum ends, because there is no typical implement and pollen-analysis was not possible, because there is no peat.

Among the long human bones, between II and III are 2 tibias, less platycnemic than these of Cro Magnon, especially a character of the neolithicum. Skull I has a chignon as the Cro-Magnon, but the face is quite different. It has been found in a layer with many pupillas, asking dry conditions, that we have after the arctic in the boreal period. Perhaps skull 3 is preboreal. The contents must be examined. So I thought it to be prudent to say, that this Cervus Elaphus culture is mesolithic-neolithic as well as the long human bones. This opinion has been affirmed by my finds at the Watertower Deventer 1927 (a part of a human upper jaw and a bone of Auerochs, sent to the "Biologisch Archaeologisch Instituut" at Groningen for determination) and the finds of

[1]) Cp. the flints of Budel with Svaerdborg: Clark fig. 31, nr 7, 15, 31, 35, 39; fig. 35, nr 1, 2, 6; fig. 36, nr 1, 2, 3, 4, 5, 14 with Budel: fig. 7, 16; fig. 4a, nr 9; fig. 6, 1—10; fig. 4A, nr 5; fig. 7, nr 1, 3, 4; fig. 4 the numbers 31, 35, 39, 6 are in my private collection.

De Zandweerd (1939) (Deventer A 2, n⁰. 3930) north of Deventer, both nearly at the same level. Here I have collected from a dredgingmachine:

1. The layer with shells (somewhat below N.A.P.): Pupilla muscorum; and also Pisidium amnicum, Bithynia tentaculata, typical shells of Ancylusperiod, Cochlicopa lubrica. Also 2 layers of clay, and peat.
2. Mammoth (femur) and reindeer $\frac{n}{z}$ 160 and $\frac{o}{z}$ 283).
3. More than 1000 bones of Equus, Bos, Cervus, Sus (at the Museum).
4. Implements, probably most of them of Cervus elaphushorn.

I $\frac{o}{z}$ 350 and $\frac{o}{z}$ 285. 2 hammer-axes cut off longitudinally as in Ertebölle as well as one long broken axe $\left(\frac{o}{z} 381 + \frac{o}{z} 382\right)$. Cp Mlle Doize. Oslo 1936 V maglemose of Belgium. The holes are perpendicular.

II $\frac{o}{z}$ 276. A point as K 1022, much spoilt by the workmen. Another cut off tine has been found in November 1939, $\left(\frac{o}{z} 380\right)$.

III $\frac{n}{z}$ 250. Phalange, perforated at 2 sides (Cp. Clark Svaerdborg fig. 40, nr 11 and Mlle Doize, Maglemose of Belgium, Oslo 1936 I).

IV $\frac{z}{z}$ 159. Part of a skull with 3 holes and also 2 holes in the horn, to fix it with ties at a stick and to contain a silex or an axe at the end of the horn (?)

Human bones:

1. $\frac{zo}{z}$ 236 and $\frac{zo}{z}$ 237. A broken lower jaw.
2. $\frac{n}{z}$ 162 a tibia, platycnemic as that of Koerhuisbeek.
3. $\frac{zw}{z}$ 303 a curved ulna.
4. $\frac{o}{z}$ 290 half a humerus.
5. $\frac{no}{z}$ 366. Femur somewhat cylindric.

Another hammer-axe(?) cut off longitudinally as at Ertebölle and maglemose of Belgium comes from IJssel between Schipbrug and Spoorbrug (2711) presented to me by Mr GUITING, Hengelo-Deventer.

---

[1]) Cp. WEINERT–MONTANDON, l'Homme fossile (1939): pleistocene man of the mesolithicum (genese of the nordic race).

Fig. 4. Four implements from Koerhuisbeek.

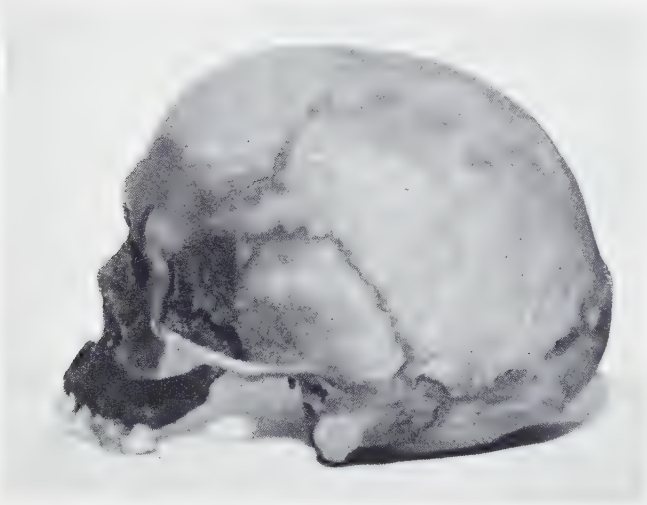


Fig. 5. Human skull with "chignon", found at Koerhuisbeek, 6, 1, 1936.

Fig. 6. Human skull K 902, found at Koerhuisbeek ("third skull").

Fig. 7. Long human bones from Koerhuisbeek.

ig. 8. Four implements from Zandweerd, 1939.

Fig. 9. Human bones from Zandweerd, 1939.

The culture of Hengelo-Lochem is a Cervus-Elaphus-culture and the same as in Deventer. So it is my opinion, that this culture is mesolithic and not pleistocene. But botanists have another limit of the pleistocene than some geologists and archaeologists, as Dr TESCH has also said on the Congress of Nijmegen (Nimway) (1939)

Holocene	
Late glacial time	Botanists
Wurm III	
Masurian Interstadium	
Wurm II	Archaeologists and geologists
Aurignacian Interstadium	
Wurm I	
Risz-Wurm interglacial	
Risz (at Deventer — 74 m below N.A.P.)	

Deventer, November 1939.

Description of the important finds, determinated by

T = Dr. TINDELL HOPWOOD; V = Prof. VAUFREY, B = Prof. ABBÉ BREUIL; H = Prof. Dr G. HASSE.

K 6 + 0.67 m: a rudder or paddle of wood.
K 4 Bos primigenius; the smaller type; atlas (B., T.).
K 729 Lower jaw of Rhinoceros tichorhinus with 2 molars (B.).
K 669 Humerus of mammoth, in IV (B.).
K 2002 Scapula, probable of mammoth. —2.5 m (H.).
K 1868 and K 1869 Antler of Cervus elaphus with a part of a skull, not rolled. — 2.5 m (B.).
K 1951 Antler of Cervus elaphus. — 2.75 m (B.).
K 1773 Part of a skull of Cervus megaceros. — 2.5 m (B.).
K 799 Tusk of mammoth. — 2.7 m (B.).
Human skull with "chignon". — 1.34 m 6/1/1936.
K 2710 os occipital of man.
K 902 Human skull. — 2.5 m 19/5/1936.
K 887 Part of human skull. — 1.25 m.
K 330 Human tibia somewhat platycnemic; above III.
K 63 Skull of Bos.
K 589 Calcaneum of Rhinoceros, below III (V.).
K 1682 Hammer-axe of Cervus elaphus. — 0.5 m (B.).
N.A.P. grains of raisins.
K 909 Molar of mammoth. — 2.74 m (B.).
K 932 Part of a long bone of mammoth or great type of Bos. — 2.2 m (B.).
K 1179 Human ulna. — 1.9 m.
K 1022 Worked piece of Cervus elaphus antler. — 0.24 m (B.).
K 1167 Human sacrum. — 1.56 m.
K 1170 parts of human skull. — 1.3 m.

K 1214 horn of Cervus elaphus, worked by man. — 2 m (B.).
K 1444 horn of young Cervus elaphus, worked by man. — 0.77 m (B.).

K 1686 human radius
K 2240 human tibia } level nearly IV, but uncertain on account of the inundation.
K 2468 human ulna

Determination of the shells by Dr J. WILFRID JACKSON, Manchester Museum, and Mr KENNARD, F. G. S.

Depth only noted, if known exactly.

The description goes from the north to the south.

BIBLIOGRAPHY.

1. Andernach — Führer durch die städtische Altertumssammlung in 1910/1911.
2. Prof. J. ANDRÉE, Beiträge zur Kenntnis des norddeutschen Paläolithikums und Mesolithikums 1932.
3. Annales de la Société malacologique de Belgique 1879. Kattendijke.
4. Prof. ABBÉ. H. BREUIL, Les subdivisions du paléolithique supérieur et leurs significations 1937.
5. ————, De l'importance de la solifluxion dans l'étude des terrains quaternaires de la France et des pays voisins, 1934. Revue de géographie physique et de géologie dynamique.
6. ————, The use of bone implements in the old palaeolithic period. Antiquity 1938.
7. Dr BERNSEN, Recente vondsten van fossiele zoogdieren in Nederland. Geologie en Mijnbouw 1932.
8. British Association for the advancement of sciences 1937, 1938.
9. K. VON BÜLOW, Zur Geologie des Ortsteins 1934. Geologische Rundschau.
10. J. BUTTER, Les silex de Budel, 1931.
11. Dr J. G. D. CLARK, The mesolithic settlement of Northern Europe, 1936.
12. ————, Report on a late Bronze Age sits in Mildenhall Fen, Westsuffolk 1936. The Antiquaries journal.
13. Congrès préhistorique de France 1936.
14. Congrès international des sciences préhistoriques et protohistoriques 1936.
15. F. DEWERS, Probleme der Flugsandbildung in Nord-West-Deutschland 1934/1935. Abhandlungen vom Naturwissenschaftlichen Verein zu Bremen.
16. Mr F. FLORSCHÜTZ, Prof. V. D. BROEK, Prof. V. D. VLERK, Dr F. C. BUSCH, The pleistocene human skull from Hengelo 1936. Proc. Kon. Nederl. Academie v. Wetenschappen.
17. Prof. V. GORDON CHILDE, Adaptation to the postglacial forest on the North-Eurasiatic Plain 1937. Early Man.
18. Prof. Dr G. HASSE, Wichelen préhistorique 1e et 2e partie 1934. Bulletin de la Société Royale belge d'Anthropologie et de préhistoire.
19. Illustrated London News. Dec. 1929.
20. Prof. JOZEF KOSTRZEWSKI, Etudes sur quelques outils préhistoriques en corne et en bois 1935.
21. LE FÈBRE DES NOÈTTES, De la marine antique à la marine moderne 1935.
22. Mittheilungen der Bohrverwaltung in den Niederlanden nr 1.
23. Prof. H. OBERMAIER, Der Mensch der Vorzeit.
24. Prof. Dr K. OESTREICH, Verslag van de Excursie naar de Rijnterrassen 1933.
25. Dr A. PENCK, Morphologie der Erdoberfläche.
26. Prof. Dr H. QUIRING, Die zeitlichen Beziehungen der Fluszterrassen Europas und Nordafrika zu den Menschheitskulturen 1930.

27. Dr A. SCHREUDER, Palaeontologische bedenkingen tegen de ijstijdtheorie 1936. Vakblad voor Biologen.
28. Dr J. F. STEENHUIS, Bijdrage tot de kennis van het kwartsgehalte der grindhoudende zandlagen aan de oppervlakte en in den ondergrond van Nederland 1937. Verhandelingen van het geologisch mijnbouwkundig genootschap.
29. Société préhistorique française. Bulletin 1936.
30. Dr TINDELL HOPWOOD, Earth movements, Ice ages and faunas 1936. Geological magazine.
31. Dr P. TESCH, Lijst der Land- en Zoetwatermolluscen, aangetroffen in de kwartaire lagen in Nederland 1929. Mededeelingen van 's Rijks geologischen Dienst. serie A 3.
32. Prof. VAYSON DE PRADENNE, La préhistoire 1938.
33. Prof. P. VOUGA, Le néolitique lacustre ancien 1934.
34. Prof. Dr WOLDSTEDT, Das Eiszeitalter 1929.
35. Dr ZEUNER, The pleistocene chronology of Central Europe 1935. Geological magazine.
36. ———, The department of geochronology 1938. Annual Report of the Institute of Archaeology.

Medicine. — *Der Einfluss von Luftdruckvariationen auf das Gehör bei Luft- und Knochenleitung.* Von H. A. E. VAN DISHOECK. (Aus der Laryngo-Rhino-Otologischen Klinik der Universität in Amsterdam. Leiter: Prof. Dr. A. DE KLEYN.) (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Das Messen des Gehörverlustes bei Luftdruckvariationen im äusseren Gehörgang ist bisher nur unvollständig und allein als ein Unterteil anderer Versuche von drei anderen Untersuchern und von uns vorgenommen worden.

POHLMAN und KRANZ [1]) (1925) untersuchten im allerersten Stadium der Audiometrie einige Ohren bei Druckvariationen von —30 bis +30 cm Wasserdruck mit Tönen von 128—2048 Schwingungen. G. v. BÉKÉSY [2]) (1932) mass bei geringer Druckerhöhung und Druckerniedrigung im äusseren Gehörgang die Impedanzzunahme des Trommelfelles und konstatierte, dass diese der Abnahme der Schallstärke entspricht. Er kommt also auf einem anderen Wege als wir [3]) zu der Ueberzeugung, dass diese Schallabnahme nicht durch Druckerhöhung im Labyrinth zustandekommt. ERNST BÁRÁNY [4]) führte durch Ausführen der TOYNBEEschen Probe bei sich selbst eine Luftverdünnung von unbestimmter Grösse im Mittelohr herbei und mass, während er in kleinen Mengen die Luft wieder zutreten liess, den Gehörverlust für eine Tonhöhe von 512 Schwingungen. Auch von LÜSCHER [5]) wurden analoge Messungen, nicht bei Luftdruckvariation, wohl aber bei Belastung des Umbo mit kleinen Gewichten von einigen Gramm ausgeführt. Die Messungen LÜSCHERs, bei welchen eine Belastung der Pars flaxida mit Quecksilber und Wasser erfolgte, sind anderer Art, weil hierbei der teilweise Verschluss des Gehörganges und die Adhäsion und die Inertie des Tropfens diese Versuche komplizieren.

Bei Messungen über den Einfluss von Luftdruck auf das Trommelfell ergeben sich Schwierigkeiten, welche nachstehend genannte Massnahmen erforderlich machen. Zunächst darf die luftdichte Verbindung des Druckes und der Schallquelle mit dem äusseren Gehörgang *keine Stenose* verursachen, da bei allmählichem Verschluss des Gehörganges, namentlich

---

[1]) A. G. POHLMAN und F. W. KRANZ: Annals of Oto-Rhino-Laryng, Vol. XXXIV, Dec. 1926; Vol. XXXV, März 1926, Vol. XXXV, Sept. 1926.

[2]) G. v. BÉKÉSY: Annalen der Physik, Bd. **13**, Heft 1, 1932.

[3]) H. A. E. v. DISHOECK: Ned. Tijdschr. v. Geneesk., No. 1, Jan. 1938; No. 28, Juli 1939; Arch. f. Ohr- usw. Heilk., Bd. **144**, Heft 1/2, 1937; Bd. **146**, Heft 1, 1939; Bd. **146**, Heft 2, 1939.

[4]) E. BÁRÁNY: Acta Oto-Laryng, Suppl. XXVI, 1938.

[5]) E. LÜSCHER: Acta Oto-Laryng, Bd. XXVII, Fasc. 3, 1939.

bei Knochenleitung, ganz andere Verhältnisse entstehen. Daher wurde ein Metallröhrchen mit demselben Lumen wie der äussere Gehörgang gewählt. Dieses Röhrchen wurde mit einem Kautschukkragen versehen, wodurch luftdichte Fixierung vorn im Gehörgang möglich war. Beim Hineinbringen dieses Ansatzstückes wurde die Ohrmuschel nach oben hinten gezogen. Auf diese Weise erhält man schon bei loser Fixierung eine völlig luftdichte Verbindung ohne Stenose. *Zu festes* Andrücken der Röhre im Ohr ist zu vermeiden, da durch Aufschieben der Haut die Bewegungen des Trommelfelles behindert werden.

Um den Einfluss des *Unterkiefers* auf die Schallübermittlung konstant zu gestalten, wurde während der Versuche ein Kautschukplättchen zwischen den Zähnen gehalten. Die Versuche wurden in der Camera silenta angestellt, und das nicht untersuchte Ohr wurde zum Ueberfluss mittels Oropax verschlossen.

Die *Knochenleitungsversuche* sind mit einer einfachen Apparatur anzustellen. Ueber dem Ohr wird nach dem Vorgange E. BÁRÁNYs ein Knochenleitungsapparat angebracht. BÁRÁNY hat nämlich nachgewiesen, dass die Leitung von verschiedenen Stellen des Mastoids stark variieren kann. Für einen bestimmten Ton wurde nun die Gehörschwelle festgestellt. Hiernach wurde nun mittels eines Politzer Ballons (bei gewünschtem positiven Druck) oder für den grossen negativen Druck durch Ansaugen mit einer Ohrspritze, ein bestimmter Luftdruck in dem Röhrensystem von Manometer, Ansatzstück und äusserem Gehörgang erzeugt. Hierauf wurde wieder die Gehörschwelle bestimmt.

Bei den *Luftleitungsversuchen* muss sowohl der Druck als der Schall durch dieselbe Röhre zugeführt werden, sodass auch die Schallquelle unter Druck zu stehen kommt. Hierbei ist dafür zu sorgen, dass die Schallquelle nicht durch die Druckveränderungen beeinflusst wird. Dies erreicht man dadurch, dass man, bei einem Telephon, die Membran durchbohrt, sodass an beiden Seiten derselbe Druck herrscht. Dieses Telephon befindet sich in einem luftdicht verschlossenen Trichter, an den man einen dickwandigen Kautschukschlauch befestigt, der den Schall nach dem zu untersuchenden Ohr führt. *Ein* Seitenröhrchen dient dazu, in diesem Röhrchen und dem Trichter einen negativen oder positiven Druck zu erzeugen; ein zweites Seitenröhrchen führt nach dem Manometer. An das Telephon wurde ein Western Electric Audiometer angeschlossen, mit welchem Töne von 128—10.000 Schwingungen erzielt werden können. Der Luftdruck wurde zwischen +200 und —200 ccm Wasser variiert.

Durch Behorchen des Telephontrichters mittels eines Stethoskops wurde kontrolliert, ob diese Druckvariationen bis 1/5 Atmosphäre von namhaftem Einfluss auf die Schallabgabe des Telephons waren. Es zeigte sich in der Tat, dass dies ein wenig der Fall war bei einem grösseren negativen Druck als 100 cm. Im Einklange hiermit ergab sich, dass Patienten mit einem perforierten Trommelfell ebenfalls nur geringe Schallveränderungen wahrnahmen. Die Strahlungseigenschaften des Telephones ändern sich nämlich, wenn sich die Dichtheit des Milieus ändert. Diese Veränderungen sind indessen klein, im Vergleich zu den grossen

Veränderungen, die durch die Druckvariationen in der Funktion des Uebertragungsapparates eintreten. Es empfiehlt sich aber, bei einem Druck über 100 cm einer gewissen Fehlerbreite Rechnung zu tragen.

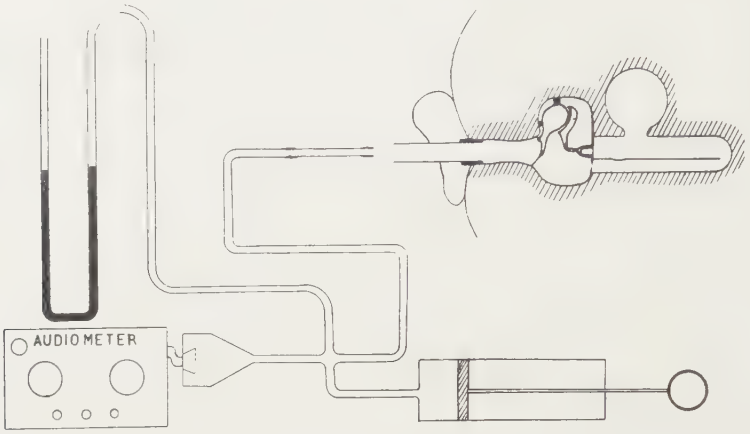


Abb. 1. *Apparatur für Gehörmessung von Luftleitungstönen bei Luftdruckvariationen (Pneumophon).*

Es ist notwendig, erst den Spannungszustand des zu untersuchenden Trommelfelles zu bestimmen. Da es Zweck dieser Versuche ist, die Impedanzzunahme bei Spannungsvariationen zu messen, ist es ein erstes Erfordernis, dass nicht schon durch Luftresorbierung eine anormale Spannung im Trommelfell vorhanden ist. Gerade durch den Umstand, dass POHLMAN und KRANZ eine solche Messung nicht kannten, fanden sie mitunter Gehörverbesserung bei negativem Druck, in anderen Fällen jedoch bei demselben Druck Gehörverminderung.

Die Kenntnis des Spannungszustandes des Trommelfelles bei verschiedenen Mittelohrerkrankungen hat das Pneumophon verschafft. Dieser Apparat ist nach demselben Prinzip gebaut wie die Apparatur für Luftleitung in Schema I. Es hat sich gezeigt, dass ein normales Ohr den Ton am deutlichsten bei einem Druck hört, der zwischen —2 und +2 cm Wasser liegt. Bei höherem wie auch bei niedrigerem Druck wird der Ton erheblich schwächer. Beim eingezogenen Trommelfell wird der Ton am deutlichsten gehört, wenn durch einen negativen Druck, z.B. von —40 cm Wasser, im äusseren Gehörgang das Druckgleichgewicht an beiden Seiten des Trommelfelles wiederhergestellt ist. Ein niedrigerer Druck als —50 cm Wasser wurde bisher nie angetroffen. Aus diesem Grunde wurde bei einem Ton von 512 Schwingungen erst festgestellt, dass sowohl Druckerhöhung als Druckerniedrigung von 3 cm Wasser eine Gehörverminderung bewirkte.

A. Luftleitung.

1. *Positiver Druck.*

In den nachstehenden Kurven ist der Gehörverlust in Decibels bei positivem Druck für verschiedene Tonhöhen wiedergegeben.

Aus diesen Kurven erhellt, dass der Gehörverlust bei positivem Druck sich besonders in den niedrigen und mittleren Tönen geltend macht. Die

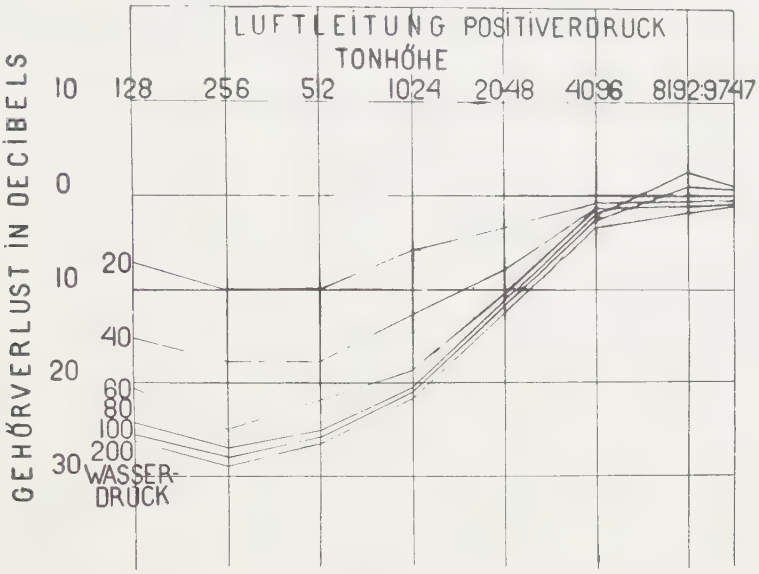


Abb. 2. *Gehörverlust von Luftleitungstönen bei positivem Druck im äusseren Gehörgang.*

hohen Töne werden nahezu gar nicht beeinflusst. Der Gehörverlust je 10 cm Druckzunahme ist bei den kleinen Drucken beträchtlich grösser als bei höherem Druck. Ueber einem Druck von 80 cm bis zu einem solchen bis 2 m und mehr bleibt die Tonstärke annähernd konstant. Auch von POHLMAN und KRAUS und von LÜSCHER sind Kurven publiziert worden, die der Kurve für einen Wasserdruck von 20 cm entsprechen.

Dieser Gehörverlust muss Veränderungen im Mittelohr und nicht intralabyrinthärer Druckerhöhung zugeschrieben werden. Durch den Druck auf das Trommelfell wird die Impedanz des Uebertragungsapparates vergrössert, und bei zunehmendem Druck wird das Sperrgelenk von Hammer und Amboss fixiert, werden die Gehörknöchelchen zusammengedrückt und auf den Steigbügeln im ovalen Fenster festgeklemmt. In diesem Stadium ist eine weitere Zunahme des Druckes von keinem Einfluss.

Für die Uebertragung der hohen Töne ist offenbar das intakte Mittelohr nicht notwendig; auch durch die fixierte und komprimierte Gehörknöchelchenkette werden diese Töne gut vermittelt. Dies erklärt die klinische Erfahrung, dass bei einigen Mittelohrstörungen das Gehör für die hohen Töne erhalten bleibt.

Die Ziffern aus diesen Kurven können uns klinisch bei der Beurteilung einer Taubheit von Nutzen sein. Man darf wohl annehmen, dass der Gehörverlust durch positiven Druck auf ein normales Trommelfell dem Gehörverlust durch Einziehung durch einen ebensogrossen negativen Druck im Mittelohr entspricht. Wenn wir also bei einem Patienten mit

dem Pneumophon eine negative Spannung von 50 cm messen, ist der Gehörverlust, den wir der Impedanzzunahme zuschreiben dürfen, 20 Decibel. Wenn man nun bei einem Patienten einen grösseren Gehörverlust findet oder einen Gehörverlust in den hohen Tönen, dann muss dieser anderen Momenten wie Schleimhautschwellungen, Exsudat, Verdickung der Fenstermembranen und dergl. zugeschrieben werden.

2. *Negativer Druck.*

In den nachstehenden Kurven ist der Gehörverlust in Decibels bei negativem Druck und verschiedenen Tonhöhen wiedergegeben.

Der Gehörverlust bei geringem negativem Druck ist erheblich geringer

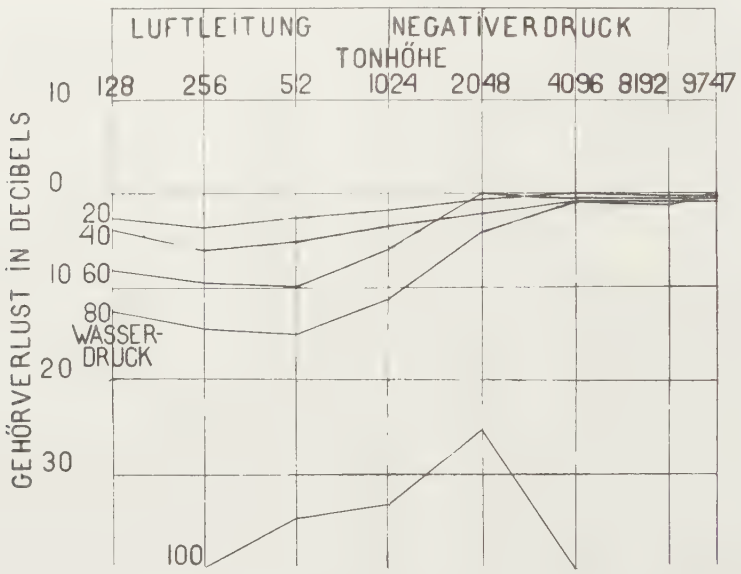


Abb. 3. *Gehörverlust von Luftleitungstönen bei negativem Druck im äusseren Gehörgang.*

als bei positivem Druck, nämlich für die mittleren Töne bei 40 cm ungefähr 10 Decibel. Auch nun sind die niedrigen Töne etwas weniger und die hohen Töne nahezu gar nicht beeinflusst.

Stärkerer negativer Druck hat einen anderen Effekt wie der positive Druck. Während bei Zunahme des positiven Druckes die Zunahme des Gehörverlustes allmählich kleiner wurde und über 80 cm praktisch konstant bleibt, findet man beim zunehmenden negativen Druck gerade das Umgekehrte. Von —50 bis —100 cm Wasserdruck nimmt der Gehörverlust stark zu, nämlich um 25 Decibel für die mittleren Töne. Die höchsten Töne werden bei —80 cm Wasserdruck sehr stark vermindert, während dies für die mittleren Töne erst bei 140 cm der Fall ist.

Wenn das Ansaugen des Trommelfells gleichmässig geschieht, ist dieser Prozess völlig schmerzlos und ungefährlich. Ein Pilot, der bis auf 1400 m steigt (mit Tubaverstopfung) hat dieselbe Trommelfellspannung.

Die Erklärung des Gehörverlustes bei geringem negativem Druck muss ebenfalls wie bei positivem Druck in einer Vergrösserung der Impedanz des Trommelfells gesucht werden. Der Unterschied aber besteht darin, dass bei positivem Druck die Gehörknöchelchenkette bald ganz immobilisiert wird, mit einem bedeutenden Gehörverlust, während bei geringem Ansaugen die Funktion der Gehörknöchelchen nur wenig gestört wird. Wenn jedoch bei zunehmendem negativem Druck die Gehörknöchelchenkette und das Hammer-Ambossgelenk derart gedehnt werden, dass der Kontakt unzureichend wird, dann nimmt der Gehörverlust stark zu.

Der Umstand, dass die Uebertragung der hohen Töne bei einer Dehnung der Gehörknöchelchenkette gestört wird, beweist, dass diese Töne fraglos des unversehrten Uebertragungsapparates bedürfen. Diese Töne pflanzen sich bei Luftleitung offenbar längs den Gehörknöchelchen und nicht, wie wohl angenommen wird, durch die knöcherne Wand des Mittelohres und der Labyrinthkapsel fort.

Bei den hohen Tönen über 2000—3000 Schwingungen vibriert der Schädel und das Trommelfell nicht mehr als Ganzes, sondern treten Unterverteilungen ein. Diese molekularen Schwingungen werden offenbar von der komprimierten Gehörknöchelchenkette sehr gut übertragen, doch schon bei geringer Verminderung des Kontaktes durch Dehnung wird die Uebertragung stark gestört.

In der Praxis kommt ein Ueberdruck im Mittelohr, dessen Gehörverlust also dem negativen Druck von Tabelle 2 entspricht, allein bei Piloten, die schnell steigen, bei Dekompression von Caissonarbeitern und nach Politzeren oder Katheterisieren vor.

B. Knochenleitung.

Durch die obengenannten, von POHLMAN und KRANZ, sowie von Anderen angestellten Untersuchungen ist nachgewiesen, dass das Mittelohr bei Knochenleitung eine Rolle spielt. Da wir, durch das Verändern des Druckes auf das Trommelfell, imstande sind, die Mittelohrkomponente gesondert zu beeinflussen, können wir uns über die Bedeutung dieses Faktors näher orientieren. Es zeigt sich, dass das Schallquantum, das längs des Mittelohres das Labyrinth erreicht, ziemlich gross ist. Der Gehörverlust durch die Druckvariationen ist bei Knochenleitung ungefähr ein Drittel bis die Hälfte des Gehörverlustes bei Luftleitung.

Wahrscheinlich erreicht also die Schallergie das Labyrinth in einer derartigen Verteilung des Gesamtquantums, dass zwei Drittel auf die Knochenleitung und ein Drittel auf Resonanz und Verstärkung im Mittelohr entfallen. Dieser letzte Teil erfährt den Einfluss der Druckveränderungen im äusseren Gehörgang in derselben Weise wie bei der Luftleitung. Auch bei Knochenleitung zeigt sich, dass die niedrigen Töne und die mittleren Töne am stärksten beeinflusst werden. Positiver Druck hat auch hier einen grösseren Effekt als negativer Druck.

Bei Knochenleitung und zuweilen auch bei Luftleitung kann man für

die hohen Töne einen deutlichen *Gehörgewinn* konstatieren. Diese merkwürdige Erscheinung kann vielleicht der Fixierung der Steigbügel im

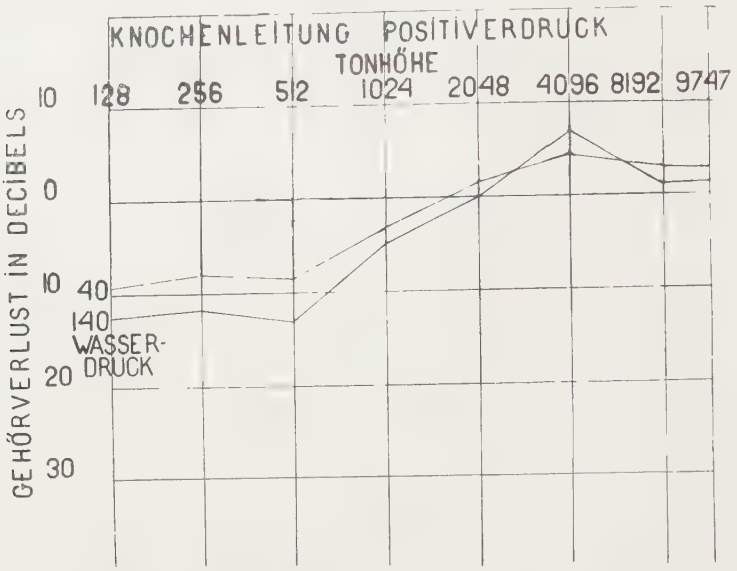


Abb. 4. *Gehörverlust von Knochenleitungstönen bei positivem Druck im äusseren Gehörgang.*

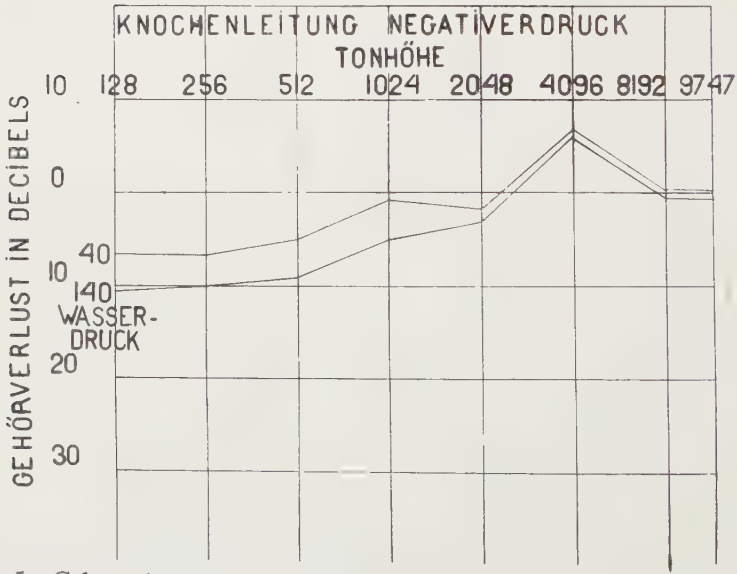


Abb. 5. *Gehörverlust von Knochenleitungstönen bei negativem Druck im äusseren Gehörgang.*

ovalen Fenster zugeschrieben werden. Die Kompression der Labyrinthflüssigkeit durch das Fibrieren der Wand, wird beim Vorhandensein *einer* schmiegsamen Ausweichmembram eine stärkere Strömung verursachen als beim Vorhandensein zweier Ausweichmembranen.

Die Möglichkeit, durch Ansaugen des Trommelfelles die Funktion des Uebertragungsapparates grossenteils zu unterbrechen, kann vielleicht klinisch für das Messen der *absoluten Knochenleitung*, nach einer Otitis, bei Otosklerose oder nach einer Labyrinthitis von Bedeutung sein. Die Kurve für —140 cm Wasserdruck aus Abb. 5 kann in diesem Falle als die absolute Knochenleitungskurve für das normale Ohr betrachtet werden, und erst ein grösserer Gehörverlust darf dann einer Labyrinthläsion zugeschrieben werden. Dieses Verfahren verdient m.E. den Vorzug vor der von CLEMINSON und HALLPIKE [6]) angewandten Methode für absolute Knochenleitungsbestimmung. Diese Untersucher vergleichen nämlich die Knochenleitung des *verschlossenen Ohres* des Patienten und des Arztes. Da bei dem verschlossenen Ohr auch noch die Resonanz, die Rolle, die das Mittelohr spielt, verstärkt, ist diese Methode unzuverlässig. Bei beiden Methoden wird die Maskierung durch Geräusch in gleichem Masse umgangen.

Die Erscheinung, dass bei grösserem negativem Druck die Uebertragung, vor allem der hohen Töne, durch Dehnung des Hammer-Amboss-Gelenkes gestört ist, eröffnet vielleicht die Möglichkeit, unsere Kenntnisse, auch über dieses Gelenk, zu erweitern. Der, zum Hervorrufen dieser Erscheinung, benötigte Druck könnte nämlich bei Patienten mit Mittelohrprozessen, bei Arthritis u. dergl. vielleicht als Mass für den Grad der Versteifung oder Erschlaffung dieses Gelenkes dienen. Eine Untersuchung in dieser Richtung wird noch angestellt werden.

Zusammenfassung.

Es wird der zu verschiedenen Trommelfellspannungen gehörende Gehörverlust angegeben. Diese Spannung kann mit dem Pneumophon gemessen werden. Findet man bei einem Patienten einen grösseren Gehörverlust als diesen Werten entspricht, dann muss eine Komplikation angenommen werden.

Eindrücken und Ansaugen des Trommelfelles ergibt bis zu einem positiven und negativen Druck von 80 cm Wasser allein für die niedrigen und mittleren Töne bis zu 2000 Schwingungen Gehörverlust. Die hohen Töne werden auch durch die (durch + 200 cm Wasser) stark komprimierte Gehörknöchelchenkette ungestört übergeführt; doch bei einem grösseren negativen Druck als 80 cm Wasser wird die Uebertragung dieser Töne stark gestört. Dieser starke Gehörverlust tritt für die niedrigen Töne erst bei —140 cm Wasser auf. Vermutlich beruht diese Störung auf Luxierung des Hammer- und Ambossgelenkes.

Bei positivem Druck im äusseren Gehörgang ergibt zunehmender Druck immer geringe Zunahme von Gehörverlust. Ueber 80 cm Wasser nimmt der Gehörverlust nicht mehr zu. Bei kleinem negativem Druck ist der

[6]) C. S. HALLPIKE: Journal of Laryng. and Otology, Vol. **45**, Jan. 1930.

Gehörverlust geringer als bei positivem Druck. Bei Zunahme der Ansaugung wird aber auch die Zunahme des Gehörverlustes eine immer stärkere.

Bei Knochenleitung ist der Gehörverlust durch Eindrücken und Ansaugen ein Drittel des Gehörverlustes bei Luftleitung. Die Gehörverlustkurven bei Knochenleitung sind denjenigen bei Luftleitung analog. Bei den hohen Tönen ergibt sich ein Gehörgewinn von 5—10 Decibel.

Durch Ansaugen des Trommelfelles kann somit die Funktion des Uebertragungsapparates nahezu ausgeschaltet werden, sodass unter diesen Umständen die „absolute Knochenleitung" bestimmt werden kann. Der negative Druck, der erforderlich ist, den Luftleitungston zu unterbrechen, könnte vielleicht ein Mittel sein, Verwachsungs- und Versteifungsprozesse des Hammer-Amboss-Gelenkes zu diagnostizieren.

Anthropology. — *Contribution to the anthropology of the Netherlands.* By H. J. T. BIJLMER. Including the further elaboration of the *Blood group research in Holland*, commenced in 1926 by the late M. A. VAN HERWERDEN. (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN in the name of the Anthropological Committee of the Academy.)

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Introduction.

As it is nine years since the late Dr. MARIANNE VAN HERWERDEN, well known among biologists, presented the first report on the blood group investigation in Holland, it is certainly not out of place to recall to mind that, in the year 1926, the famous anatomist LOUIS BOLK, on behalf of the Royal Academy of Sciences at Amsterdam, inaugurated the Anthropological Commission, the biochemical section of which was placed under the guidance of the first-mentioned scientist. Under her direction the blood groups of some 25000 persons from all parts of the country were studied; moreover, data on the pigmentation of eyes and hair were gathered. The blood samples were collected with the aid of local physicians and a biologist, Miss W. KEERS, and in collaboration with several students. All samples were sent to the laboratory of Dr. VAN HERWERDEN, who examined them with the assistence of Mrs. TH. J. BOELE–NIJLAND. The centralizing of this examination at one and the same spot, and carried out by the same persons by one and the same method, is greatly in favour of the reliability of the research.

Up to the present three parts of the investigations have appeared in the press. In 1930 Dr. VAN HERWERDEN and Mrs. BOELE–NIJLAND published the *Investigation of Blood Groups in Holland*, containing the results of the examination of 3085 students, mainly from the Universities of Utrecht and Delft, both obtaining their pupils from all over the country. In 1932 Dr. C. P. J. PENNING, together with both the ladies just mentioned, wrote his *Blood Group Investigation in the Over-Veluwe (Harderwijk and surrounding districts)*, embracing the results from 1074 people, and in 1933 Dr. FLORIS HERS, like the former a local physician, published the *Blood Group Investigation in the Hoeksche Waard*. Then, in the early part of 1934, the work was suddenly interrupted by the sad and unexpected death of Dr. MARIANNE VAN HERWERDEN, the soul of the research. Happily the collecting of the material had been finished, and the extensive card-system was after, as before, the death of Dr. VAN HERWERDEN, compiled with the

utmost care by Mrs. BOELE–NIJLAND. The present author, at the request of the deceased, undertook to complete the further elaboration of the material. Various other occupations, one of which was an expedition to the pygmy-Papuans of Central New Guinea in the years 1935—'36, interrupted the work, but finally he succeeded in bringing the investigation to an end with the valuable assistance of Mrs. C. BIJLMER–WEPSTER, who did the immense tabulating and cyphering necessary to ascertain the few simple figures that appear in this paper. I am fully aware of the fact that this study has been carried out on a more modest scale than it would have been, had Dr. VAN HERWERDEN been able to accomplish it herself.

I dedicate it to her in grateful remembrance.

The technique has been described in the first-mentioned paper. It may suffice to state that the blood was collected in small tubes, filled with 0.5 cc of a solution of 1 % sod. citrate in saline solution, with the addition of 0.1 % superol to preclude infection.

Agglutimation was tested on slides: a tiny drop of the diluted blood suspension being added to a larger drop of haemotest. Every test was executed twice, and if necessary controlled by a loupe with 10 × magnification.

My sincerest thanks are due to the many physicians and students who did the troublesome work of getting into touch with the people who had to offer a drop of their blood, as also to the last-named, without whose willingness this research could not have been accomplished.

The Distribution of Races in the Netherlands.

It has long been known that the Netherlands are inhabited by a rather mixed population. One of the generally accepted reasons for this is that this country is situated on the border line of two of the principal races of Europe, the Nordics and the Alpines. Dinarics and Mediterraneans will not have participated in the formation of the people. This, at least, was the opinion of one of their outstanding anthropologists, the late Prof. BOLK who, in general, agreed with the opinion put forward in RIPLEY's book *The Races of Europe*, which is still fairly current.

Let us for a moment survey the ancient history of the country. No remains of Homo Neanderthalensis have been found in its soil, nor bones of obviously palaeolithic times, but of both the old neolithic cultures that were present at the dawn of Europe's history, viz. that of the dolmen ("hunnebedden", giant graves) and that of the roundbarrows, the traces have been discovered. We are still ignorant of the varieties of mankind to which those cultures must be attributed, and science is not even perfectly sure that those varieties are of the Caucasian race. The (possibly) mongoloid Laps of to-day in the North and the negroid Grimaldi men of the past in the South, necessitate reckoning with the possibility that the

white man has not always been the unchallenged master of the continent that he at present calls his own.

In any case the two prehistoric varieties of neolithic inhabitants of Europe have left their traces in the diluvial sands of the Dutch country, and if they might happen to turn out to be a long-headed (dolmen) and a round-headed (barrows) sub-race of the Caucasian stem, then we shall have to assume that even in those ancient times the basis for the present mixture had been already laid. Skull material is scarce, but two of the oldest specimens found are a hyperbrachycranic skull at Rykholt (Limburg) and a dolichocranic one that was recently brought to light at Hengelo (Overijsel). The latter may not be termed neolithic; it is probably mesolithic or even palaeolithic.

We may take it for granted that the Romans at the mouth of the Rhine struck upon the tall fair race of the Nordics, in these regions consisting of Germanic tribes. A couple of centuries before, on the frontier of their own Empire, they had made the acquaintance of those other barbarians, the Gauls, who were also of Teutonic breed, at least as regards their appearance. These Gauls even invaded the empire and plundered the capital. As some of their culture reminds us of the East, and their original territory must have reached as far as the coasts of the Black Sea, we have to consider whether also some Asiatic element might have been present in their physical aspect. Those Gauls are occasionally denominated Celts, and the name Celto-Slavic Race is evidence that anthropology sought to identify the Gauls with the early Alpines, since both these names are used as synonyms. We have reason to suppose that there has been at least a certain amount of admixture of pigmentation and round-headedness. It may also be that these Gauls were brachycephalic of themselves.

The Gallic culture, of the Hallstatt type, is found in the Netherlands south of the Rhine and Meuse, and it is believed that Gallic tribes penetrated thus far north during the Roman occupation.

Batavians and Frisians, Germanic tribes from the middle Rhine or thereabouts, conquered by the Romans in 50 B.C., were put on guard in the estuary of the Rhine against the barbarians who lived in the north of it. Originally barbarians themselves, but, pacified by the Romans and transformed into their allies, they were as a matter of fact more Nordic than the Gauls, who for centuries had undergone the influence of the South.

North of the Rhine the Netherlands were at that time inhabited by "untamed" Germanic tribes to whom, some centuries after the birth of Christ, the name of Saxons is usually applied. It was tribes of those Saxons who in the fourth century crossed the North Sea from its eastern shores to those of Britain, and who are commonly considered as pure Nordics.

The Saxons held their territory until the beginning of the Middle Ages, not indeed because of their strength, but because of the little importance of their country, which did not rouse the greed either of the Romans, or of the Franks who came after them.

The Franks possessed a culture evincing oriental influence, and evidently related to that of the Goths, who had established themselves in south-west Europe. It is supposed that the Franks originated from the same *regio transrhenana*, from whence barbaric Teutons used to come and fight the outposts of the Roman army. And, like many of their predecessors (e.g. the Batavians), they ended their adventures by settling down in the Gallic province of the Roman Empire. Their chieftains rose to power as that of the Romans declined, and after the breakdown of the Empire they became masters of the Gallic land as far as the borders of the Rhine. Also the Franks must be considered as originally Nordics, but romanized, be it to a lesser extent than the Gauls. It was not till the ninth century that they obtained a firm footing in the Saxon districts north of the Rhine, and in the same time they gradually drove back the Frisians who, after the fall of Rome, had moved south along the coast of Holland as far as the islands of Zeeland. The Frisians had to retire to the extreme north, the Frisian province (Friesland) of to-day.

This is, briefly, the early history of the Netherlands. Therefore we have to reckon with a preponderance of Frisian blood in the north-west, Saxon blood in the north-east and Frankish blood in the south. Three different strains, but varieties of the Nordic race, all of them. Moreover, there is a possibility, mentioned above, that Celtic Gauls occupied part of the south before the penetration of the Franks. But here we have to remember that Celtic and Nordic are probably only gradations of Nordicism. Also the ancient Gauls were called blond giants by the Romans, and those Celts cannot be identified with the Alpines who now populate the centre of France and the adjacent parts of central Europe.

The brachycephaly, so typical of the Celto-Slavs of to-day, had been already in Europe for thousands of years. It was characteristic of the Lake-dwellers of Switzerland, and possibly of the Beakerfolk and some of the tumuli-builders. Were these brachycranic Caucasians similar to those we know at present as peoples of the Caucasus? Indeed the typical culture of these neolithic round-heads radiates from the shores of the Black Sea. Were they Alpines or Dinarics? We are not sure. But we know that the prehistoric brachycephals, and these, judging by the skulls, of both varieties, reached from Asia to the North Sea and even to Great Britain.

Thus, if we find that in the Netherlands the population consists of an odd mixture of dolicho's and brachy's, we need not necessarily fall back upon the Gauls or Celts. There is the possibility that brachycephaly is of a much older date.

When, at the beginning of this century, BOLK took up the anthropological investigation of the Netherlands, he examined next to the form of the head also the pigmentation. He disclosed the astonishing fact that pigmentation increases towards the south, but brachycephaly towards the east. However, that is what we see in Europe from prehistoric times until now! Brachycephaly radiates from Asia, and affects the Slavs and Baltic

peoples on their northern, as well as the Alpines on their more southern routes through Europe. In how far this round-headedness is originally a mongoloid trait may be left to discussion; in any case real Mongols in historic times added their influence to prehistorical conditions, the Huns invading Europe as far as the Elbe. The figures of the cephalic index in the Netherlands have been added to Table I.

On the other hand, pigmentation proceeds evidently from the South. We might say, brachycephaly is an oriental, pigmentation a meridional, character. BOLK accredits the Alpines with the round heads as well as with the pigmentation that he found in the Netherlands. NYESSEN, 1925, quite rightly found this difficult to accept. Conditions in our eastern provinces constitute indeed a considerable objection. NYESSEN is of opinion that the index in question, viz. ± 81, so strictly mesocephalic but quite near the lower border of brachycephaly (81.5), is characteristic of the Saxons of to-day. Nevertheless he sees in the Saxons a variety of the Nordic race. In fact this stands to reason more than BOLK's conception of "blond Alpines". Why should the pigmentation, considered by BOLK as a conspicuous proof of Alpine blood south of the Rhine, have disappeared north of that river?

As for that pigmentation, it appears to me that the question is not so difficult to explain. There proves to be a rather sharp boundary between blond and brunette, formed by the Rhine and Meuse. But there was once the frontier of the Roman Empire! It was as far as that, that once Gallic culture flourished; it was as far as that, that afterwards the land was penetrated by the Franks.

But this implies that it was up to the Meuse and Rhine that Romanisation reached, and with Romanisation meridonal influence! The pigmentation was brought directly by the Romans, and indirectly by more and more romanized Gauls and Franks! And that the brachycephaly in the South scarcely exceeds that of the North-east proves that Franks and those earlier Gauls, or Celts, were more like meridionalized Nordics than Alpines, as we know them at present from the central highlands of Europe.

There is one phenomenon that needs closer attention. The old Frisian skulls have been found to be almost uniformly dolichocranic (Ind. cran. 74). And a set of 35 skulls from the towns of Reimerswaal and Saaftingen, in Zeeland, disastrously flooded and swept away from the earth in the fifteenth century, were distinctly brachycranic, with a mean of 85. The ranges of distribution did not even overlap each other. The modern Zeelanders do not exhibit that former index any longer, but are actually still slightly more brachycephalic than the inhabitants of North and South Holland, though not so much as the inhabitants of the eastern provinces of the Netherlands. But in contradistinction to the latter, they show a marked degree of pigmentation. Although they correspond in this quality, as in the cephalic index, with the inhabitants of the "Frankish" provinces of Brabant and Limburg, they show a great difference in outward

appearance and mental characteristics. Certainly the latter provinces are more like what we are used to call Alpine. Thus we come to think of the possibility that those ancient Zeelanders may have been of that race of *prospectatores* (FLEURE), that square-faced, broad-headed, tall, dark breed of exploring seafarers, pushing from their homes in the eastern Mediterranean along the southern and western shores of Europe up to the coasts of the North Sea.

It is said that before them the Mediterraneans had already crept up from the South as far as England. In this connection it is worth mentioning that along the coast of Holland groups of brown-eyed people are scattered amidst a population of Frisian extraction, this time, however, with a more pronounced dolichocephalic index.

The Mediterraneans are thought to have played yet another part. The tale goes that a considerable influx of Spanish blood took place during the occupation of Walcheren by the Spaniards in the so-called Eighty Years' War in the 16th century. Although some investigators do not agree with this supposition, others (DE MAN) hold to this possibility, especially on the strength of the fact that, in Walcheren, dark hair is often found combined with dolichocephaly. A belief in the Spanish influence is so profoundly rooted in the local traditions that the so-called Spanish descent was mentioned several times during the recent blood-grouping by the persons investigated.

The territory of the Netherlands is but small, yet its anthropological problems are intricate. And that with reason, for its muddy soil happens to be situated where one of Europe's highways, the Rhine, empties itself into one of its most important seas!

Pigmentation.

Passing on now to the large material of Dr. MARIANNE VAN HERWERDEN, we shall dwell first on the pigmentation, as this subject corresponds best with the preceding chapter. (See Table I on the following page.)

The regular diminution of the blue eye-colour towards the South is evident. The figures concur fairly well with those of BOLK, collected a quarter of a century previously and taking into consideration that the appreciation of the pigmentation was executed without the aid of grades.

A closer analysis of the results requires attention. Reviewing the various components of the four northern provinces, an even distribution over the various parts of the district was found. But for Gelderland and North Holland conditions proved to be otherwise. The part east of Rhine and IJsel, and closely connected with the province of Overijsel, the so-called "Achterhoek", appears to contain 78 % blue-eyed against 22 % brown-eyed people, and must therefore be brought to the northern group. The same holds for N. Holland above the river IJ, inhabited by a population of Frisian extraction. However, as mentioned before, we have to reckon here

Distribution of the body lengths (V. D. BROEK) and the cephalic indices (BOLK) in the Netherlands according to the provinces.

TABLE 1

	Eyes			Stand. error	Eyes			Stand. error	Bolk 1908			v. d. Brc 1938
	n.	Blue	Brown		n.	Blue	Brown		Blue eyes	Ind. Ceph.		Body len
Friesland	1857	81.2%	18.8%	±0.92					81.5	80.4		174.47
Groningen	115	74.8%	25.2%	±4.05	Northern Provinces				78.1	81.2		172.33
Drente	386	87.3%	12.7%	±1.70	4003	80% (3218)	20% (785)	±0.63	79.9	81.0		170.80
Overijsel	1645	78.3%	21.7%	±1.02					77.0	81.4		171.05
Gelderland	2616	73.5%	26.5%	±0.87					71.5	80.4	(81. 1)[1]	170.51
Utrecht	332	68.1%	31.9%	±2.56	Central Provinces				68.6	80.5		171.33
N. Holland	2895	75.2%	24.8%	±0.81	8600	71% (6108)	29% (2492)	±0.49	70.7	80.5		171.61
S. Holland	2757	64.6%	35.4%	±0.91					68.9	79.6		171.17
Zeeland	2903	54.9%	45.1%	±0.93	Southern Provinces				60.0	80.8	(79.9) [2]	169.78
Brabant	2386	60.2%	39.8%	±1.01	6016	57.5% (3456)	42.5% (2560)	±0.65	62.0	81.5		168.79
Limburg	727	58.7%	41.3%	±1.83					59.7	80.6		167.83

with pockets of a darker population. This holds for some towns and villages in West Friesland, where Hoorn and Enkhuizen were famous ports for the trade to the Indies in the seventeenth century. Yet I decline to believe that, in those olden times, Malay blood crept in to any appreciable extent, nor is this indicated by other physical qualities. Other places with a higher degree of pigmentation are situated in the dunes on the coast of the North Sea. In West Friesland we found for 482 individuals 72 % blue and 28 % brown eyes; in Egmond, a village in the dunes, respectively 72.9 % and 27.1 %. But for the rest, 1397 persons in N. Holland, north of Amsterdam, yielded figures of 81.3 % and 18.7 %. Also the fishing-villages in South Holland exhibit a low degree of pigmentation; 459 persons had 79.5 % blue and 20.5 % brown eyes. Thus it is clear that Holland north of Amsterdam — apart from some coastal districts —, and Gelderland east of the river IJsel, must be ranked with the four northern provinces.

The rest of North Holland and the remainder of Gelderland, with the province of Utrecht between them, show a stronger pigmentation. The number of people examined in these densely populated districts is but small, and concerns more especially the inhabitants of the country on the south coast of the Zuyder Sea. A total of 1940 subjects, — the 843 of PENNING [3]) included — yielded 66.5 % blue and 33.5 % brown eyes. I might allude to PENNING's figures of 65.7 and 34.3 %, which correspond very well with the preceding.

In the province of South Holland the pigmentation is already stronger. HERS [3]) formerly published part of the investigation. He found for 1560

[1]) For the "Achterhoek", that is the district east of the IJsel.

[2]) For Walcheren.

[3]) The papers of PENNING and HERS have already been mentioned in the Introduction.

persons in one of the South Holland Islands 62.8 % blue eyes. Combined with other material we come, for a total of 2245 in South Holland — without the big cities and the coast villages of Scheveningen and Katwijk — to a percentage of 61.5 % blue against 38.5 % brown eyes. These figures approach those of one of the three southern provinces of the Netherlands, viz. North Brabant, 2386 inhabitants of which proved to have 60.2 % blue, and 39.8 % brown eyes. The adjacent Limburg, the most south-eastern and so-called most Alpine province of the Netherlands, is slightly more pigmented: of 727 subjects 58.7 % had blue and 41.3 % dark eyes, or even 57.4 % over against 42.6 % for 575 subjects after elimination of 152 people from the mining-district, since they had been gathered from various parts of the country. The provinces of South Holland and North Brabant together yield 60.8 % blue and 39.2 % brown eyes. The number of persons examined in Limburg is too small to furnish statistically reliable figures, but they support the current opinion that the population of that province is darker than that of Brabant, though closely related. If we combine Limburg with Brabant, as is generally done, we get 59.8 % blue, against 40.2 % brown eyes, which yields no significant difference with the combination Brabant—South Holland.

It is not without reason that I have dwelt on this situation. For the most western of the three southern provinces of the Netherlands, Zeeland, appears to have 54.9 % blue against 45.1 % brown eyes. One would expect that the pigmentation was highest in the south-east, but it happens to be in the south-west! Zeeland is Netherland's darkest province; with 45.1 % dark eyes it tops the list.

Thus, after all, it is only partly true that pigmentation grows stronger as one proceeds to the south. It is the north-east that is least pigmented; dark hair and eyes have penetrated into the Netherlands from the south-east (Limburg), as well as from the south-west (Zeeland). The peasants of North Brabant exhibit a rather low degree of pigmentation, so that in this respect they hardly differ from the peasants of South Holland.

The list on page 120, corrected according to the lines as indicated above, is as is shown in Table II on the following page.

We find that the North and East Netherlands form a compact block of blue-eyed people. The coast of South Holland (the fishing villages of Scheveningen and Katwijk) shows corresponding figures. In the "blond" districts, however, are pockets of darker colour, scattered along the coast (West Friesland, Egmond, the island of Urk).

The central parts of the country exhibit a stronger pigmentation.

The south is the darkest, but there appear to be two different strains that furnish the pigmentation, and that at the seaside would seem to be the darker.

In the years 1937 and 1938, when I was Medical Officer charged with the examination of recrutes, I had myself the opportunity of making a

TABLE II

	n.	Eyes		Stand. error	
		Blue	Brown		
Friesland	1875	81.2%	18.8%	±0.92	80% 20% ± 0.48 (5603) (1400)
Groningen	115	74.8%	25.2%	±4.05	
Drente	386	87.3%	12.7%	±1.70	
Overijsel	1645	78.3%	21.7%	±1.02	
East Gelderland ("Achterhoek")	1603	78.0%	22.0%	±1.04	
N. Holland (north of Amsterdam)	1397	81.3%	18.7%	±1.04	
	7003				
North Holland (the remaining part), Utrecht, West Gelderland (more especially the coastal areas of the Zuyder Sea)	1940				66.5 33.5 ± 1.07
South Holland (without cities and coast)	2245	61.5%	38.5%	±1.03	60.8 39.2 ± 0.72
North Brabant	2386	60.2%	39.8%	±1.01	
	4631				
Limburg (without mining district)	575				(57.4 42.6 ± 2.06)
Zeeland	2903				54.9 45.1 ± 0.93
Special areas:					
West Friesland	482	72.0%	28.0%	±2.05	
Egmond (fishing village)	251	72.9%	27.1%	±2.81	
Katwijk, Scheveningen (id.)	459	79.5%	20.5%	±1.88	

study of the pigmentation. My researches covered the provinces of North Holland, Zeeland and North Brabant.

I learned very much from this investigation, more especially the way how to proceed. In practice I made the following sub-divisions. For the eyes I distinguished blue, grey or green, and brown. Properly speaking, there is a gradual transition from blue to brown. Green is a mixture of the two in equal parts. This green colour is sometimes very fine. In a good light a distinct brown film can be seen spread over the under layer of blue. As the brown pigment increases, the green gradually passes, via light-brown, into dark brown.

The grey colour of the eyes, although mostly lighter than true blue, is undoubtedly also a mixed colour; it results, namely, when only a very thin layer of brown covers the blue. This very light brown, almost yellow, renders the deep blue lighter, and the result is a grey tint. Remarkably enough, grey eyes thus owe their lightness to an admixture of dark pigment!

Occasionally this is not the case, namely, when the grey bundles of connective tissue in the stroma of the iris are so thick as to fade the blue to grey. In such a case grey eyes must be ranked with the pure blue eyes.

There are no eyes without a single grain of brown pigment. In my

opinion we need attach no importance to such a single grain. I do not hold blue eyes to be an original feature of any particular race; the blue is only the lowest limit of the pigmentation of the iris stroma, viz. the total lack of it. It is futile to deal with the limit against the next variable as a Mendelian character.

In my opinion we cannot do anything but divide eyes into 1. blue, i.e. poor in pigment, 2. brown, i.e. rich in pigment, and 3. eyes which hold an intermediate position, viz. grey and green. This diagnosis can be made by a simple inspection.

One peculiarity deserves attention. I actually found twice over (in more than 3000 cases) a pair of yellow eyes. In both cases the hair was a dark blond, so that they were relegated to the brunettes. The pigmentation here seems to me to be of an entirely different kind, so that such eyes are not to be classed with brown ones.

I do not advocate the use of artificial colour schemes in these examinations. The loss of time occasioned is not compensated by the advantage gained by the greater exactitude. For the grading pretends to yield an exactness which in reality it does not possess. The colour of the eye depends to a large extent upon the light falling on it and the grading would, therefore, always have to be done in a particular light, which, naturally, is not practicable in the examination of large numbers of persons. But, apart from this, the colour of the eye depends upon the blood infiltration of the iris, upon the degree of contraction of the muscular elements, in short, upon the individual conditions under which the examination takes place. The colour varies much the same as the colour of the face. She has not her "beau jour" is an expression that has a biological foundation and therefore teaches that the value of the colour schemes for the eye is illusionary in anthropological field-work. They are of use only in very specialised investigations, as, for instance, heredity analysis.

With respect to the colour of the hair, this is a more difficult question than that of the eyes, since here we have not the contrast between blue and brown. The range of colour goes gradually from light blond to darkest brown, even to black. Any sub-division here into groups is a purely artificial one.

There is one group of persons who make a definite impression of being blond, while another with equal definiteness may be termed brunette. But in between there is a very large group of "dark blond".

Red hair holds a separate place, that is to say, the red tint, dependent upon the chrysochrome pigment (Bolk) occurring diffusely in the hair-shaft, would appear to be entirely independent of the nigrochrome which is found in the hair-shaft in the form of brown granules. This must not be taken to mean that the "red" is a group entirely apart from that of the "blond to black". There is very frequently an admixture of a reddish tint in the latter that is caused by chrysochrome, and in the "red" there is usually an admixture of nigrochrome. So that we cannot do otherwise

than classify as "red" what manifests itself to the eye as such. Here, too, pure red hair is but a limit, and it would be a mistake to made a sharp demarcation between it, as a specific variety, and the hair groups of other colours which also frequently contain some red.

The artificial colour schemes for hair, too, are apt to be overestimated. In the first place it frequently happens that the hair is not the same colour all over the head. Moreover, entirely apart from grey, the colour changes greatly with the age (the so-called "nachdunkeln"), so that it would be of little use to determine the colour of the hair without at the same time taking the age into consideration. Further, the hair colour is not dependent upon pigment alone, but also upon moisture and fat, and, finally, upon the greater or less exposure to the sunlight. Lastly, it must not be forgotten that the colour of the hair is subject to the way the light falls on it. As all these factors exercise an incalculable influence, a minute determination of the hair colour would be labour lost; it possesses a value solely in laboratory research, and in family investigations as to heredity, provided special precautions be taken.

How, then, have we to make distinctions in an examination of the population? I have done it according to the complexion. There is plainly a connection between fair hair and blue eyes, as can be expected since both are the expression of a lesser disposition for pigmentation.

The groups are as follows:

I	II	III
a. blue eyes fair (blond) hair	*a.* grey or green eyes dark blond hair	*a.* brown eyes dark blond hair
b. grey or green eyes fair hair	*b.* grey or green eyes brown hair	*b.* brown eyes brown hair
c. blue eyes dark blond hair	*c.* blue eyes brown hair	
	d. brown eyes blond hair	

To these 3 groups a fourth group was added, containing the persons with decidedly red hair, without further classification respective eye colour.

The persons in I. convey the impression of blond, they are the fair-complexioned. Of these only Ia are pure blond.

The persons in III are those with the brunette complexion.

The persons in II are those with the mixed complexion.

Group I corresponds to the pigmentation of H. Nordicus, group III to that of H. Alpinus and H. Mediterraneus.

We see from Table III that in the whole district of N. Holland examined, fair complexions predominate by far, true brunettes being on an average but 10 %. The distribution of these latter is typical. Whereas in the

TABLE III

n.	I Blond complexion	II Mixed compl.	III Brunette compl.	IV Red
	Rural districts of N. Holland north of the River Y, excl. West-Friesland			
1057	67 % ± 1.46 (pure bl. compl. 48 %)	24.0%	7% ± 0.79 (incl. 1% black hair)	2%
	West Friesland, incl. the towns of Hoorn, Enkhuizen and Medemblik			
665	62.5% ± 1.87 (pure bl. compl. 44%)	24.5%	11% ± 1.21	2%
	The typical fishing villages of the Zuyder Sea: Volendam, Edam, Monnikendam			
139	64% ± 4.08 (pure bl. compl. 46.5%)	26.0%	9% ± 2.43	1%
	The island of Urk			
48	48 % ± 7.24 (pure bl. compl. 31 %)	36.0%	10% ± 4.34	6%
	The island of Tessel			
67	69 % ± 5.66 (pure bl. compl. 55 %)	21.0%	7% ± 3.13	3%
	The town of Alkmaar			
197	68 % ± 3.32 (pure bl. compl. 50 %)	18.0%	11% ± 2.23	3%
	The town of Zaandam			
261	64 % ± 2.98 (pure bl. compl. 48 %)	22.5%	12% ± 2.02	1½%

country districts the percentage is 7 %, this rises at the Zuyder Sea coast to 9 %, and in West Friesland, which projects like a peninsula into the Zuyder Sea, even to 11 %. This increase takes place at the expense of a decrease in the pure blonds. The Zuyder Sea island of Urk is the most strongly pigmented; although the number of brunettes is not higher than that in the places on the coast, the blonds have ceded a great deal of their number to the mixed group. The North Sea island of Tessel exhibits exactly the opposite extreme, which agrees entirely with the general assumption that our North Sea islanders are the purest representatives of the H. Nordicus.

Here we must refer again to the investigations of Dr. VAN HERWERDEN, in which the aforesaid Urk occupies an important place. The local physician, Dr. VONK, kindly furnished her with the data. Of 286 persons 81.5 % proved to have light, and 18.5 % dark eyes, a proportion, thus, entirely agreeing with that of the northern provinces. In the colour of hair, however, one remarkable fact was seen, namely, that this in 36.1 % cases was light blond (including red), and in 63.9 %, dark blond, or black!

We thus see that this investigation indicates that the mixed complexion is of frequent occurrence in Urk. This peculiarity was a short time ago confirmed by Dr. PIEBENGA, who passed several months in the island for anthropological research and whose results will be published shortly.

The two largest towns of N. Holland, north of the River Y, Zaandam and Alkmaar, show what BOLK had already determined for an urban population, namely, an increase in the number of brunettes. In these two cases this is not at the cost of the pure blonds. There was no significant difference between the two towns; for the blond complexion it is 4 % ± 4.46, while for the brunettes the difference is quite immaterial.

As regards the other differences already mentioned, statistically these are in general efficient. Between the rural districts of N. Holland and West Friesland there is a difference in the blond complexions of 4½ % ± 2.35, that is in other words, probable; that in the brunette complexions is 4 % ± 1.44, or practically certain. The smaller groups are of value merely for orientation. Nevertheless the difference between Urk and Tessel is plain; for blonds it is 21 % ± 9.2, thus statistically very probable; for the brunettes the numbers are too small and thereby the errors too great to prove the difference statistically. The towns of Alkmaar and Zaandam lend themselves better for this purpose; the combined brunette group differs from that in the rural districts of N. Holland by 4½ % ± 2.25.

Comparing N. Holland with N. Brabant and Zeeland we obtain results as given below. The number of persons available for N. Brabant is but small.

n.	Blond compl.	Mixed compl.	Brun. compl.	Red
131	64% ± 4.20 (pure bl. compl. 52%)	22%	11.5% ± 2.79 (incl. 2.3% black hair	2.5%

The blonds are not less common than in N. Holland, the mixed group is not large and only the brunette group is rather numerous and equals that of the dwellers on the coast of the Zuyder Sea. The difference with the rural districts of N. Holland is in this group 4½ % ± 2.91 and thus not quite consistent.

In Walcheren, the principal island of Zeeland, we see a different distribution. (See Table IV on the following page.)

Thus in Zeeland we notice a distinct augmentation in the number of brunettes to nearly 20 %, accompanied by a marked decrease in the number of blonds. N. Brabant is much more in accordance with Holland, which agrees with the figures collected by Dr. VAN HERWERDEN. The differences between Zeeland and the rural districts of N. Holland are 13 % ± 2.59 for

TABLE IV

n.	I Blond compl.	II Mixed compl.	III Brun. compl.	IV Red
	Walcheren			
141	52 % ± 4.21 (pure bl. compl. 38 %)	27.5%	19% ± 3.30 (incl. 4.2% bl. hair)	1.5%
	Middelburg and Flushing			
195	55.5 ± 3.56 (pure bl. compl. 36.5 %)	27.0%	16% ± 2.62 (incl. 4.1% bl. hair)	1.5%
	Zeeland Flanders			
208	54 % ± 3.45 (pure bl. compl. 37 %)	25.0%	19% ± 2.71 (incl. 5.3% bl. hair)	2.0%
	As the differences are trifling we have taken the Zeelanders together			
544	54 % ± 2.14 (pure bl. compl. 37 %)	26.5%	17.8% ± 1.64 (incl. 4.5% bl. hair)	1.7%

the blonds and 10.8 ± 1.83 for the brunettes, which leaves no room for doubt.

As will be known, a small percentage (± 2 %) of red hair is found spread over the whole country. It would seem to be slightly less frequent among the people of Zeeland, which may be due to the fact that the red tint will be overspread more often by the brown pigment. It is worthy of note that BOLK also found a low percentage for Zeeland, viz. 1.8, as against 2.45 for the rest of the Netherlands.

Likewise the data of Dr. VAN HERWERDEN bring out the low percentage of *red hair* in the islands of Zeeland. Of 1919 individuals a percentage of 1¼ were red, whereas in Zeeland Flanders, which, as will appear from the ratios of the blood groups, are the nearest to the Dutch lowlands, 2½ % (1000 ind.) were red-haired.

My own percentage of about 2 for the various groups examined is an arbitrary one; it may be much higher if sandy hair be counted together with the red. It agrees very well with the percentage from Dr. VAN HERWERDEN's material. There, of 17170 persons from all parts of the Netherlands, 354 or 2.06 % ± 0.12 were found to have red hair.

That the hair in Zeeland is of a darker kind than in the provinces of N. and S. Holland is also evidenced by the greater frequency of *black hair*. Black is not a colour of itself, but is the furthest limit of brown and dark blond. In N. Holland, north of the River Y, black (in our Tables included in "brown") occurs in about 1 %, in the Zeeland groups, on the contrary, in 4 % to 5 %. For the rural districts of Brabant I noted 2.3 %.

The colour of the hair of the head often differs from that *on the privy parts*. The latter is sometimes darker, and on fair-haired persons may be brown. I have also seen it dark blond together with decidedly brown hair on the head and brown eyes, thus, with the pure brunette

complexion. Such a combination was very clear in the case of a boy with Malay blood who had black hair and brown eyes, but distinctly dark-blond pubes hair.

A close comparison between Dr. VAN HERWERDEN's figures and my own is not possible. It is obvious that where in the first case a distinction is made between blue and brown eyes only, the grey and green eyes will be divided over the blue and brown. I presume that in N. Holland the combination of grey with dark-blond was very frequent, and that about half of the "mixed" group got included in that of the blue-eyed. The brown colour thereby yielded a percentage of 20 %. In Zeeland the darker pigmentation (green eyes) of the mixed group would seem to have shifted these almost entirely to the side of the brown-eyed; as a matter of fact the subjective opinion of the observer will also have played no small part.

I did not go into Dr. VAN HERWERDEN's material in the matter of the hair. Four groups were made: black, dark blond, blond and red. Above I have already explained what circumstances may mislead us in determining the colour of the hair, so that, if the grouping be performed by an inexperienced person, the results are less reliable. Moreover, while the line of demarcation between black and dark blond is already difficult, that between dark and light blond is of value only if the investigation be carried out by one and the same person. As scores of persons without any anthropological experience had assisted Dr. VAN HERWERDEN with her vast material, it is obvious that the strange disparities in the results do not present sufficient reliability to merit being registered. This is less so with respect to the colour of the eyes, for which reason I have made use of them where they were the large groups, as in the provinces.

From the description of the pigmentation in the Netherlands it appears that blond complexions predominate markedly in the north-east, but are in the majority also elsewhere. The brunette complexion plays a part of some importance, especially in Zeeland and Limburg. We may deduce from this, in concurrence with NYESSEN, that the Netherlands on the whole belong to the domain of the Homo Nordicus. This is in agreement with the Index Ceph. = 80.32 of 10.000 Dutch, varying from 79.6 to 81.5. The slight increase in the index, as has been shown, does not take place from north to south, but rather from west to east. The lowest index was found, for instance, on the Dutch North Sea coast (South Holland 79.6, the island of Walcheren (Zeeland) 79.9); on the other hand, besides N. Brabant, an index higher than 81 occurs in Groningen, Drente, Overijsel and the eastern part of Gelderland.

The brunette Walcheren, thus, appears to be anything but brachycephalic, nor does Zeeland considered on the whole (Ind. ceph. 80.8),

nor Limburg (80.6). The Alpine element must, therefore, not be overrated for the south of the Netherlands. Nevertheless, it may have had some influence locally and temporarily. Here I may refer again to the brachycephalic skulls of the submerged towns of Zeeland. According to BOLK and VAN DEN BROEK, these are Alpine skulls, but they can hardly be held to have anything to do with the Walcheren of to-day, and the late Dr. DE MAN, an expert on the anthropology of Zeeland, came to the conclusion that the population of Walcheren, at the time of that great flood, must have been other than in the more easterly districts.

The strong pigmentation of the Zeeland islands, and that of various places on the coast of the Zuyder Sea, support the theory above-mentioned that a dark seafaring people crept up along the West European coasts. That we find mid-Netherland more strongly pigmented than the Frisian and Saxon regions, is probably to be ascribed to the circumstance that here we are in the region of the large rivers where the old Roman settlements lay. Added to which, the province of South Holland at that time lay still south of the Rhine estuary, and was thus also open to the Romanizing influence.

The Blood Groups.

The material was gathered under the auspices of Dr. MARIANNE VAN HERWERDEN and tested in her laboratory with the assistance of Mrs. BOELE–NIJLAND.

Altogether 21140 individuals were tabulated. Thousands of the blood tests made were rejected because the spenders proved to be closely related; the material was sifted as carefully as possible. As the investigations in general, as well as those already published by Dr. VAN HERWERDEN and her collaborators in particular, have adequately proved that there is no difference between the blood groups of men and women, sex has been disregarded in this research.

From the extensive material, put at my disposal, the following results have been calculated.

The distribution of the blood groups of the whole of the Netherlands is:

I.	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
	21140	$46.5\% \pm 0.34$	$42.3\% \pm 0.34$	$8.3\% \pm 0.19$	$2.9\% \pm 0.11$
		$r = 68.2$	$p = 26.0$	$q = 5.8$	

Compared with the result of the students' examination in 1930:

II.	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
	3085	$45.7\% \pm 0.91$	$41.2\% \pm 0.89$	$9.6\% \pm 0.53$	$3.5\% \pm 0.33$
		$r = 67.6$	$p = 25.6$	$q = 6.8$	

The difference with I. proves to be of no statistical importance, viz:

ø	*A*	*B*	*AB*
$0.8\% \pm 0.97$	$1.1\% \pm 0.95$	$1.3\% \pm 0.56$	$0.6\% \pm 0.35$

In the district of Over-Veluwe PENNING obtained the following figures:

III.	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
	873	$47.3\% \pm 1.68$	$41.0\% \pm 1.66$	$7.8\% \pm 0.90$	$4.0\% \pm 0.66$
		$r = 68.8$	$p = 25.8$	$q = 5$	

The differences with I. are quite immaterial:

ø	*A*	*B*	*AB*
$0.8\% \pm 1.72$	$1.3\% \pm 1.70$	$0.5\% \pm 0.92$	$1.1\% \pm 0.67$

HERS found in the district of Hoeksche Waard:

IV.	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
	1591	$45.4\% \pm 1.25$	$44.3\% \pm 1.25$	$7.8\% \pm 0.67$	$2.5\% \pm 0.40$
		$r = 67.5$	$p = 27.0$	$q = 5.5$	

Neither here are the differences with I. of any importance:

ø	*A*	*B*	*AB*
$1.1\% \pm 1.29$	$2.0\% \pm 1.29$	$0.5\% \pm 0.70$	$0.4\% \pm 0.41$

The greatest difference is seen between the series of the Veluwe and that of the Hoeksche Waard (III. and IV.). These, however, do not seem to be reliable either as statistics:

ø	*A*	*B*	*AB*
$1.9\% \pm 2.11$	$3.3\% \pm 2.07$	—	$1.5\% \pm 0.77$

From the above it will appear probable that the blood group distribution over the Netherlands is fairly equable. We shall test this by the ratios in the various provinces.

We see from Table V that the ø group is rather high in the north-east provinces (the four first-named; Groningen forms an exception, but, taking the standard deviation into consideration, this is immaterial); in the province of Holland the ø is somewhat low. Comparing Friesland with the whole of the Netherlands, the differences in ø do not yet appear absolutely consistent:

ø	*A*	*B*	*AB*
$3.1\% \pm 1.15$	$2.0\% \pm 1.13$	$0.6\% \pm 0.62$	$0.5\% \pm 0.35$

The same may be said of N. Holland as compared with the whole of the Netherlands:

ø	*A*	*B*	*AB*
$2.7\% \pm 0.98$	$1.7\% \pm 0.98$	$1.2\% \pm 0.57$	$0.2\% \pm 0.32$

TABLE V.

Provinces	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
Friesland	2053	1018 49.6% ± 1.10	828 40.3% ± 1.08	158 7.7% ± 0.59	49 2.4% ± 0.34
Groningen	119	52 43.7% ± 4.54	56 47.1% ± 4.56	7 5.9% ± 2.16	4 3.3% ± 1.64
Drente	389	229 58.9% ± 2.49	128 32.9% ± 2.38	21 5.4% ± 1.14	11 2.8% ± 0.84
Overysel	1766	865 49.0% ± 1.19	711 40.3% ± 1.17	146 8.3% ± 0.66	44 2.5% ± 0.37
Gelderland	2854	1305 45.7% ± 0.93	1262 44.2% ± 0.93	214 7.5% ± 0.49	73 2.6% ± 0.30
Utrecht	335	159 47.5% ± 2.73	148 44.2% ± 2.71	22 6.6% ± 1.35	6 1.8% ± 0.73
N. Holland	2918	1278 43.8% ± 0.92	1284 44.0% ± 0.92	276 9.5% ± 0.55	80 2.7% ± 0.30
S. Holland	2869	1281 44.6% ± 0.93	1249 43.5% ± 0.92	251 8.7% ± 0.53	88 3.1% ± 0.32
Zeeland	2919	1371 47.0% ± 0.92	1162 39.8% ± 0.90	289 9.9% ± 0.55	97 3.3% ± 0.33
N. Brabant	2403	1108 46.1% ± 1.02	1045 43.5% ± 1.01	168 7.0% ± 0.52	82 3.4% ± 0.37
Limburg	753	340 45.2% ± 1.81	309 41.0% ± 1.79	67 8.9% ± 1.04	38 5.0% ± 0.79

If, however, we take the whole of north-east Netherlands together (4 provinces):

N. E. Netherlands

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
4327	50.0% ± 0.76	39.8% ± 0.74	7.7% ± 0.40	2.5% ± 0.24

and the provinces of N. and S. Holland:

N. and S. Holland

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
5787	44.2% ± 0.65	43.8% ± 0.65	9.1% ± 0.39	2.9% ± 0.24

the difference is:

ø	*A*	*B*	*AB*
5.8% ± 1.0	4.0% ± 0.99	1.4% ± 0.56	0.4% ± 0.34

We see that N. and S. Holland have a consistently higher *A* and a fairly

probable consistent higher *B*, whereas the north-east provinces have a definitely higher ø group.

Further, the differences with the whole of the Netherlands also appear consistent now:

	ø	*A*	*B*	*AB*
of N. E. Prov.	3.5 ± 0.83	2.5 ± 0.82	0.6 ± 0.44	0.4 ± 0.26
of N. and S. Holland	2.3 ± 0.73	1.5 ± 0.73	$0\,8 \pm 0.43$	—

in so far as the ø of the N.E. provinces is high, their *A* is low and the ø of N. and S. Holland is low, while the *A* and *B* are on the high side.

If, now, we take Gelderland as an example of the mid-Netherlands (Utrecht had better be left out of consideration, as its western part joins the Holland lowland and the eastern part the Gelder hills) we shall see:

Gelderland

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
2854	$45.7\% \pm 0.93$	$44.2\% \pm 0.93$	$7.5\% \pm 0.49$	$2.6\% \pm 0.30$

The differences with N.E. Netherlands are:

ø	*A*	*B*	*AB*
$4.3\% \pm 1.2$	$4.4\% \pm 1.19$	$0.2\% \pm 0.63$	$0.1\% \pm 0.38$

and with N. and S. Holland:

ø	*A*	*B*	*AB*
$1.5\% \pm 1.14$	$0.4\% \pm 1.14$	$1.6\% \pm 0.63$	$0.3\% \pm 0.38$

These last are not consistent, although the *B* of Holland is probably higher than that of Gelderland and, therefore, approaches nearer to that of the N.E. provinces. As regards ø and *A*, Gelderland is definitely on the side of the Holland provinces, and differs from the N.E. provinces.

With respect to the three southern provinces, we shall take Zeeland separately on account of its special nature. The two other provinces, N. Brabant and Limburg, appear, as is also the case with Gelderland, to agree with the average for the Netherlands, as the first glance will show.

Brabant and Limburg

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
3156	$45.9\% \pm 0.89$	$42.9\% \pm 0.88$	$7.4\% \pm 0.47$	$3.8\% \pm 0.34$

Compared with the blood groups of N. and S. Holland, given again below:

N. and S. Holland

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
5787	$44.2\% \pm 0.65$	$43.8\% \pm 0.65$	$9.1\% \pm 0.39$	$2.9\% \pm 0.24$

there then appears to be no great difference. Only, the two southern provinces have not the high *B* of N. and S. Holland; the difference of 1.7 ± 0.61, although probable, is not quite definitive.

The agreement with Gelderland was almost entire, nor was there any great difference with the Netherlands as a whole.

We shall now take Zeeland:

	Zeeland			
n.	ø	*A*	*B*	*AB*
2919	47.0% ± 0.92	39.8% ± 0.90	9.9% ± 0.55	3.3% ± 0.33

Here again we find something of the high ø and the low *A* of N.E. Netherlands, combined, however, with the high *B* of N. and S. Holland. The ø, however, does not differ definitively enough from any of the other groups at all; moreover, it differs as much from that of N.E. Netherlands (3 % ± 1.19) as from that of N. and S. Holland (2.8 % ± 1.13). The *A* is the same as that of N.E. Netherlands, and differs plainly from that of N. and S. Holland: 4 % ± 1.11, and rather less plainly from that of the two other southern provinces: 3.1 % ± 1.26. The *B* agrees with that of N. and S. Holland, but differs consistently from that of Brabant and Limburg: 2.5 % ± 0.72, and also from that of N.E. Netherlands.

Conclusion.

In N.E. Netherlands a high ø and a low A. These, however, are also found in Zeeland (especially in the islands, as will be seen below), but combined there with a high B. In N. and S. Holland there is a low ø and probably a fairly high A and B.

The whole is rather confusing. It is noteworthy that the three western provinces (N. Holland, S. Holland and Zeeland) exhibit a high *B*, so that the *B* at all events does not increase eastwards as is the case for the cephalic index, nor southwards, as the pigmentation does. The *B*, however, nowhere shows statistically absolute differences with the figures for the whole of the Netherlands, albeit the difference for Zeeland will be very probable and, compared with its easterly neighbour and with N.E. Netherlands, it is even statistically certain.

We must not lose sight of the fact that the statistically consistent differences are, as a matter of course, by no means absolutely sure, as the samples of the population might originate from limited groups, and so fail to answer the condition of being real "random" samples.

As Zeeland, from an anthropological point of view is such a remarkable bit of the Netherlands, we shall examine it somewhat more closely.

The peculiarities above-mentioned do not hold good in respect of Zeeland Flanders, which is part of the Flemish mainland.

For Zeeland Flanders the figures are:

Zeeland Flanders

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
1000	42.9% ± 1.56	45.3% ± 1.58	8.3% ± 0.88	3.5% ± 0.58

from which it would seem to approach more the other southern provinces. The differences, at least, are not consistent:

ø	*A*	*B*	*AB*
3.0% ± 1.80	2.4% ± 1.80	0.9% ± 1.00	0.3% ± 0.67

The rest of Zeeland is:

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
1919	49.1% ± 1.15	37.0% ± 1.11	10.7% ± 0.71	3.2% ± 0.40

The differences with Zeeland Flanders are considerable:

ø	*A*	*B*	*AB*
6.2% ± 1.94	8.3% ± 1.91	2.4% ± 1.13	0.3% ± 0.71

These differences are statistically important, *and the islands of Zeeland, with their low A and high B, as well as the high ø, are yet more distinctive.* The *A* and *B* even exhibit *consistent differences with the Netherlands as a whole,* viz. 5.3 ± 1.16 and 2.4 ± 0.74 respectively.

We might go further and endeavour to find some connection between the blood groups and *the nature of the soil,* viz. diluvium and alluvium, which, in the Netherlands, agrees with high and low-lying land. We have arranged all the districts examined according as they yielded for each of the blood groups ø, *A* or *B*, a high, medium, or low percentage.

As regards the *A* group, we did not observe any correlation between the percentages and the soil. Many of the diluvial districts in Overijsel, Gelderland and Brabant show medium values; some parts of the "Geldersche Achterhoek" have a very high *A* (up to 50 % or more), but various parts of the "Overijselsche Achterhoek" (Twente), which are geographically similar, have a low *A* percentage (30—40 %).

With respect to the alluvium we found, for instance, in Friesland high figures of 45 % or more, together with low figures of 38 %.

On the alluvial soil of N. and S. Holland the *A* is frequently high, but 350 inhabitants of the diluvial "Gooi" exhibited likewise a high *A* (50.3 %). Zeeland, which is exclusively alluvial, has, however, a low *A*, below 40 %.

Let us now consider the *B*. This, on the diluvium of Overijsel, is high (up to 13 %), but that of Gelderland, on the other hand, is low (7 %), as is also that of Brabant (5.5 %). An average high *B*, of above 10 %, however, also occurs in the alluvial islands of Zeeland. The same holds good likewise for the Dutch west-coast watering-place of Scheveningen ($B = 14.1\ \% \pm 2.00$). The $B = 22.2\ \% \pm 1.96$ for the typical village on

the Zuyder Sea, Volendam, (n = 454) means little, and is doubtless due to intermarriage. Another Zuyder Sea village, Huizen, is only 7.2 % ± 1.27 (n = 415). The statistically undoubted difference between the two in this case does not help us any farther on, since intermarriage is not precluded, so that we may save ourselves the trouble of calculation.

In many alluvial districts the *B* has an average value.

Finally, the ø. Friesland has a high ø, viz. 49.6 %, in which a clay (alluvial) region (n = 551, ø = 51 %) takes part, as well as a sandy (diluvial) region (n = 438, ø = 53.2 %). Overijsel has likewise a ø of 49 %, fairly evenly distributed over the various districts. In N. Brabant the ø is often high on the diluvium (n = 1200, ø = 50 %), although also sometimes low (n = 578, ø = 42 %); on the clay soil it is low (n = 636, ø = ± 42 %) like in Holland (ø = 43.5 %). On the similar clay soil of the Zeeland islands the ø again is very high, viz. 49.1 %.

We may conclude that the nature of the soil has nothing to do with the blood groups. Nevertheless, we have determined the blood group ratio for the whole diluvium of the Netherlands and found, for 8471 persons:

ø	*A*	*B*	*AB*
47.2% ± 0.55	42.4% ± 0.54	7.3% ± 0.28	3.1% ± 0.19

The only consistent difference with the ratio of the whole of the Netherlands is in *B*, viz. 1 % ± 0.34; *B* proves to be low.

In the various parts of the alluvium of the Netherlands the ø, *A* and *B* percentages show such contrasts that simply to count them up is of little use. But the lowlands of N. and S. Holland and Zeeland have together, n = 7831, a high *B* = 9.7 % ± 0.33, which yields a consistent difference with the whole of the Netherlands of 1.4 % ± 0.38.

The alluvium of N.E. Netherland, however, does not participate in this high *B* (*B* = 8.1 %). We have not the right, therefore, to speak here of a contrast between alluvium and diluvium, but of one between the western coastal provinces and the eastern provinces. From the available figures it appears merely that in the Netherlands, as we already remarked, the *B* is highest on the North Sea coast. This obliges us to take account of the eventuality *that not merely the stronger pigmentation, but also the B factor may have reached the Netherlands from the side of the sea.*

From the three articles already published on the blood group investigation in the Netherlands, it is sufficiently clear that there is no correlation between blood group and the colour of hair or eyes. This is in accord with the results usually found in the literature. There is no reason to examine the whole material as to these correlations; moreover, as remarked above, the data respecting the pigmentation with regard to the blood groups were too inexact to subject them to a mathematical manipulation which would lead the reader to expect an accuracy which is non-existent.

In the material under discussion we have confined ourselves to making

a few tests at random. Of the 1857 persons from Friesland examined, 1507 are stated as possessing blue eyes, and 350 brown eyes.

For these groups the blood group ratio is:

	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
Blue	1507	49.5%±1.29	40.5%±1.26	8.0%±0.70	2.0%±0.36
Brown	350	52.0%±2.67	40.0%±2.62	5.0%±1.17	3.0%±0.92

Without further calculation it can be seen from the indicated errors that these groups do not differ from each other. The differences with the Netherlands as a whole seem to be fairly marked, but on a further consideration do not prove to be statistically reliable:

	ø	*A*	*B*	*AB*
Blue	3.0%±1.33	1.8%±1.30	0.3%±0.73	0.9%±0.38
Brown	5,5%±2.69	2.3%±2.64	3.3%±1.19	0.1%±0.93

A second test at random has been taken with respect to the final hair colour, black, and the special colour, red. Among a group of 3743 persons, distributed over 4 provinces, 198 = 3.5 % are stated to be black-haired and 129 = 2.3 % as red-haired. The blood group ratio was as below:

	n.	ø	*A*	*B*	*AB*
Black h.	198	48.0%±3.55	43.5%±3.52	5.5%±1.62	3.0%±1.21
Red hair	129	52.0%±4.40	40.3%±4.32	4.6%±1.85	3.1%±1.53

Here, too, the various blood groups are present in both groups and with a number that does not differ statistically from the whole of the Netherlands.

Finally, a few special groups of persons claim attention. First of all the students who were examined between the years 1929—'33, and were thus not included in the publication of 1930. They yielded the following blood-group ratios:

Students 1928 — 1933

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
771	45.1% ± 1.80	43.8% ± 1.80	7.9% ± 0.98	3.1% ± 0.62

As can be seen, there is no difference with the Netherlands as a whole, since the standard deviations exceed the differences in the respective blood group percentages.

The differences with the results, obtained with the students examined previously, are:

ø	*A*	*B*	*AB*
0.6% ± 2.01	2.6% ± 2.01	1.7% ± 1.11	0.4% ± 0.70

These cannot be considered as of importance either. The later examination of the 771 students thus forms a confirmation of the former 3085; moreover, the students prove to be an adequate representation of the people of the Netherlands.

Jews.

Further there are 1077 Jews here, living for the most part in Amsterdam, who were not included in the investigation which comprised the whole of the Netherlands. These have been examined by Dr. HERTZBERGER. The blood group ratio proved to be as below:

n.	ø	*A*	*B*	*AB*
1077	42.3% ± 1.51	40.4% ± 1.50	11.7% ± 0.98	5.6% ± 0.71

The differences with the total for the Netherlands are:

ø	*A*	*B*	*AB*
4.2% ± 1.55	1.9% ± 1.54	3.4% ± 1.00	2.7% ± 0.72

145 Jews in an Asylum were examined:

ø	*A*	*B*	*AB*
39.3%	42.8%	11.7%	6.2%

Although the number of 145 in this last category is so small as to be of little value in itself, it is interesting in so far as it everywhere accentuates the differences found with the first-named examination.

We find a distinct difference with the total for the Netherlands, mainly in the high *B*, and this not at the expense of *A*, but of ø. The *AB*, too, is conspicuously high.

It is known from the literature that the Jews are distinguished from West-Europeans by the high *B*. The Jews in East-Europe exhibit figures ranging from 16—25 %. This percentage, however, is not specific for these people; on the contrary, it is typical of East-Europe and West-Asia. The Dutch Jews, now, would appear to possess a comparatively high *B*, but this, after all, is so low again that it fits into the blood group ratios of West Europe. BOLK remarked that the Jews everywhere tend to acquire the physical features of the people in the countries of their adoption, and this would seem to hold good also for the blood groups.

SUMMARY.

A survey is here given of the composition of the population of the Netherlands in olden times. Frisians, Saxons and Franks predominated, while there were also Gallic ("Celtic") influences south of the large rivers.

The Frisians, Saxons and Franks, and perhaps the Gauls, too, originally were Teutons, and thus representatives of the Nordic race. The population of the Netherlands south of the Rhine, in the region of the Franks, as a consequence of their Romanization, absorbed meridional blood, as is expressed in their higher percentage of brown eyes and dark hair. In so far as this southern blood was partly Gallic, we may speak of an Alpine factor. Since, however, brachycephalism is no commoner in the more pigmented provinces of the Netherlands than in the "blond" eastern

provinces, the part played by the present-day specifically brachycephalic Alpine race in the composition of the people of the southern part of the Netherlands must be held to be problematic.

The peculiar population of Zeeland renders it probable that a second meridional factor reached the Netherlands from the sea. The Mediterranean race may have had a share in this, while, further, there is a possibility of the "prospectatores" (FLEURE).

The Netherlands, after all, must be considered as a country with a predominating Nordic population.

The blood group distribution in the Netherlands is:

ø	*A*	*B*	*AB*
$46.5\% \pm 0.34$	$42.3\% \pm 0.34$	$8.3\% \pm 0.19$	$2.9\% \pm 0.11$
$r = 68.2$	$p = 26.0$	$q = 5.8$	

On closer examination it appears that in the north-east Netherlands the ø is high, and the A low. This holds good equally well for the islands of Zeeland, there, however, in conjunction with a high *B*.

In the provinces of N. and S. Holland the ø is low, the *A* and the *B* are probably fairly high.

The most characteristic feature of the whole, and somewhat perplexing, aspect is that the *B* factor in West Netherland is higher than in East Netherland.

The *B* factor does not seem to have come either with the pigmentation from the South, or with the brachycephalism from the East. Since the highest *B* percentage in the Netherlands, in Zeeland, accompanies the strongest pigmentation, there is reason for the supposition that the *B* has been brought by the people coming from the sea, who also brought the pigmentation into Zeeland.

As was to be expected, no connection was found between the blood group distribution and the nature of the soil.

The Jews in the Netherlands exhibit distinctly a higher *B* percentage (11.7 %) and a lower ø percentage than the rest of the population, but not to such a degree as to place them outside the cadre of the peoples of western Europe.

REFERENCES.

BARGE, J. A. J., Anthropologie en de anthropologische samenstelling van het Nederlandsche Volk. J. Geogr. Soc. of the Neth. (1936).

BOLK, L., De bevolking van Nederland in hare anthropologische samenstelling, in GALLÉE: Het boerenhuis in Nederland. Utrecht, Oosthoek (1908).

————, Over den index cyphalicus en de absolute maten van het hoofd der bevolking van Nederland. Verh. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1920).

————, Is rood haar een nuance of een variëteit? Verh. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1907).

BORK–FELTKAMP, A. J. VAN, Anthropological Research in the Netherlands. Verh. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1938).
BROEK, A. J. P. VAN DEN, La population des Pays Bas. J. Geogr. Soc. of the Neth. (1938).
————, Oudste Geschiedenis van den Mensch. Utrecht (1936).
————, The pleistoncene human skull from Hengelo. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1936).
BIJLMER, H. J. T., Pygmies and Papuans. Results of the Anthropological Mimika Expedition 1935—'36. Nova Guinea, Leiden (1939).
GIFFEN, A. E. VAN, Over de oudste bevolkingselementen van ons land. Mensch en Maatschappij, Jg. I (1925).
HADDON, A. C., The Races of Man. Cambridge (1924).
HERS, V. HERWERDEN, BOELE–NIJLAND, Blood Group Investigation in the "Hoeksche Waard". Verh. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1933).
HERTZBERGER, H., Verhouding der bloedgroepen bij Nederlandsche Joden. Mensch en Maatschappij (1930).
HERWERDEN, M. A. VAN and BOELE–NIJLAND, TH. J., Investigation of Blood Groups in Holland. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1930).
HOLWERDA, J. H., Nederlandsch vroegste geschiedenis. Amsterdam (1918).
Kultur der Gegenwart, Die, Bd. Anthropologie (1923).
MAN, J. C. DE, Twaalf Schedels van Reimerswale en de bevolking van Zeeland. Middelburg (1893).
NIJÈSSEN, D. J. H., The passing of the Frisians. Amsterdam (1927).
PENNING, V. HERWERDEN, BOELE–NIJLAND, Blood Group Investigation in the "Over-Veluwe". Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam (1932).